

## 簡易型CIP法による高精度移流スキームの開発

小松幸生\*

### An accurate scheme for hyperbolic equations based on the memory saved Cubic Interpolated Pseudo-particle Method

Kosei KOMATSU\*

**Abstract** A new scheme for hyperbolic equations was developed based on the Cubic Interpolated Pseudo-particle method (CIP) which is one of the most precise among schemes with third-order accuracy in space. The CIP, however, requires memories of spatial derivatives of solutions while it is more efficient than another accurate schemes, which is a serious shortcoming especially for use in complex models such as current ocean ecosystem models composed of more than 10 compartments. The new scheme, named the simplified CIP method (SCIP), requires no memory of supplementary parameters and uses only one step for time integration. Moreover compared with previous lower-order accurate schemes, the scheme has both of higher stability and higher performance without remarkable diffusions and dispersions caused by finite-difference approximations, although it is second-order accurate in space and it contains neither additional diffusivities nor temporal smoothing.

**Key words:** accurate advection scheme, Cubic Interpolated Pseudo-particle (CIP) method, numerical diffusion and dispersion, SCIP method

双曲型微分方程式は波動方程式あるいは移流方程式とも呼ばれる物理現象の基本方程式であり, 1次元空間では下記のように書ける:

$${}_t f + u {}_x f = 0. \quad (1)$$

ここで,  $f=f(x,t)$  は任意のスカラー量,  ${}_t$  と  ${}_x$  はそれぞれ時間  $t$  と空間  $x$  による微分を示し,  $u(x,t)$  は  $x$  方向の流速を表す。  $u$  が一定であれば (1) の解は  $F$  を任意の関数として,

$$f = F(x - ut) \quad (2)$$

であるが,  $u$  はほとんどの場合一定ではないので,  $f$

を求めるためには数値計算に頼らざるを得ない(例えば, Press *et al.*, 1992)。(1)の数値解法, つまり移流スキームは数多く考案されているが, 当然, より高い精度を追求すれば計算はより煩雑になる。

最も簡単なスキームは時間, 空間とも1次精度の前進風上(上流)差分法で, CFL条件さえ満たせば数値的に安定で繁用されるスキームである。しかし, よく知られるように顕著な疑似拡散効果を免れない。時間は1次精度, 空間は2次精度の前進中央差分法は無条件に不安定である。さらに, 時間, 空間とも2次精度のスキームの代表例としてLeapfrog-中央差分法やより洗練されたLax-Wendroff法があり, これらはCFL条件さえ満たせば中立安定であるが, 数値モードの増幅が大きく, 前進風上差分法のような疑似拡散効果が

2003年6月13日受理 (Received on June 13, 2003)

水産総合研究センター業績 A 第40号 (Contribution No. A 40 from the Fisheries Research Agency)

\* 中央水産研究所 〒236-8648 神奈川県横浜市金沢区福浦2-12-4 (National Research Institute of Fisheries Science, Fukuura 2-12-4, Kanazawa, Yokohama, Kanagawa, 236-8648, Japan)

顕著でない代わりに、空間勾配が大きい場所では疑似分散効果により解が振動して  $f$  の初期値が正であっても負値を呈する欠点がある (Kantha and Clayson, 2000)。Leapfrog-中央差分法はMOMモデル (Pacanowski, 1995) やPOMモデル (Mellor, 1996) に代表される多くの海洋大循環モデルで採用されているが、ほとんどのモデルは数値的な振動を抑制するために拡散係数を意図的に大きくするなど、人工的な平滑化を導入している。しかし、このような人工的な平滑化は水温や塩分のようなスカラー量の発達を過度に抑制してしまい、特に長時間の積分では解が力学的に不正確になる可能性が高い (Gerdes *et al.*, 1991; Hecht *et al.*, 1995; Yamanaka *et al.*, 2000)。

この種の平滑化を含む人工的な調整を施したスキームの洗練度は年々向上しているものの、例えばTVD法 (Harten, 1983)、PPM法 (Colella and Woodward, 1984)、ENO法 (Harten, 1987)、Adams-Bashforth法 (Farrow and Stevens, 1995) をはじめとする最近のスキームの多くは、非常に煩雑である上、調整項のパラメータの決定において客観性に欠けるという弱点がある (矢部ら, 1992)。こうした中、人工的な調整項を加えない、非常に簡潔で安定かつ高精度なスキームとして、Cubic Interpolated Pseudo-particle法 (CIP法) が提案されている (Takewaki *et al.*, 1985; 矢部, 1992; 矢部ら, 1992)。しかし、この手法では一時的にせよ  $f$  の空間微分  $f_x$  を記憶する必要があるのが難点である。例えば最新の海洋生態系モデルではコンパートメントが10以上もあり (e.g., Kishi *et al.*, 2001)、しかも3次元高解像度のモデルとなるといくら電算機の能力が日々向上しているとはいえ記憶容量の負担が2倍になるリスクは大きい。かといって、人工的な調整項を加えた上記のスキームは煩雑で大抵非効率的であるから複雑な生物過程を含む生態系モデルに使用するのは適当でないし、もちろん、疑似拡散の影響が顕著な前進風上差分法はしばしばパッチ状の空間分布を呈する卵・仔稚魚やプランクトンの移流・拡散過程の正確な推定には不向きである。

そこで、本稿では、多自由度の低次生態系モデルと卵・仔稚魚の移流・拡散モデルの高精度化を念頭に置き、下記の方針で新たな移流スキームの開発を試みた。

- (1) 普遍的で、初期条件や境界条件に依存しない。
- (2) CFL条件さえ満たせば安定である。
- (3) 疑似拡散と疑似分散の影響が小さい。
- (4) 人工的な調整項や根拠の不明瞭な職人的技法を使用しない。
- (5) 計算の効率化からスキームは1段階にする。つまり、各時間ステップにおいてまず一時的な未来値

を計算して保存しておき、続いてその値をもとに最終的な未来値を求めるといった多段階方式は採用しない。

- (6) 時間差分では、計算不安定の大きな要因となる過去値の使用は避ける。
- (7) 空間差分では、計算の省力化と、空間領域の全体を網羅するため、扱う点数は一方向につき3点とし (つまり、空間について2次の精度)、また、煩雑さを避けるため格子の中間値は使用しない。

その結果、CIP法を利用することにより簡便な割に高精度な移流スキームを新たに開発した。以下では簡単のため空間は1次元、速度  $u$  は一定として話を進めるが、多次元への拡張および変化する  $u$  への展開は容易である。

## 方 法

$x$  座標を幅  $\Delta x$  の格子点で構成し原点から  $i$  番目の格子の位置を  $x_i$  と表す。時刻は幅  $\Delta t$  で増加するとして  $n$  ステップ目の時刻を  $t_n$  と表す。CIP法では  $n$  ステップ目における  $f$  について  $x_{i-1}$  と  $x_i$  の間を  $x$  の3次多項式で近似する (矢部ら, 1992):

$$F(x) = a(x - x_i)^3 + b(x - x_i)^2 + f_{x_i}^n(x - x_i) + f_{x_i}^n. \quad (3)$$

ここで、 $f_{x_i}^n$  と  $f_{x_{i-1}}^n$  は  $(x_i, t_n)$  における  $f$  と  $f_x$  をそれぞれ示す。同様に  $x_{i-2}$  と  $x_{i-1}$  の間は  $F_{i-1}(x)$  で与えられるので、 $x_{i-1}$  では少なくとも下記の連続の条件を満たす必要がある:

$$F(x_{i-1}) = F_{i-1}(x_{i-1}), \quad (4a)$$

$$dF(x_{i-1})/dx = dF_{i-1}(x_{i-1})/dx. \quad (4b)$$

この2つの関係から、

$$a_i = (f_{x_i}^n + f_{x_{i-1}}^n) / \Delta x^2 - 2(f_{x_i}^n - f_{x_{i-1}}^n) / \Delta x^3, \quad (5)$$

$$b_i = (2f_{x_i}^n + f_{x_{i-1}}^n) / \Delta x - 3(f_{x_i}^n - f_{x_{i-1}}^n) / \Delta x^2 \quad (6)$$

を得る。ところで、 $u$  が一定として(1)を  $x$  で一回微分すると

$${}_t f_x + u {}_x f_x = 0. \quad (7)$$

が成り立つので、 $f_x$  についても(2)のように、

$$f_x = dF(x - ut)/dx \quad (8)$$

と書ける。結局  $f_i^n$  と  $f_{x_i}^n$  の未来値はそれぞれ(2),(3), (8)から,

$$f_i^{n+1} = F(x_i - u \Delta t) = a(-u \Delta t)^3 + b(-u \Delta t)^2 + f_{x_i}^n(-u \Delta t) + f_i^n, \quad (9)$$

$$f_{x_i}^{n+1} = dF(x_i - u \Delta t)/dx = 3a(-u \Delta t)^2 + 2b(-u \Delta t) + f_{x_i}^n, \quad (10)$$

により求まる。ただしCIP法は簡便で精度も高い (Takewaki *et al.*, 1985) が, この方式だと前述の通り  $f$  に加えて  $f_x$  も記憶する必要があるのが難点である。そこで, 本稿では  $f_x$  を下記のように近似する。

まず,  $f$  を  $x_{i-1}$ ,  $x_i$ ,  $x_{i+1}$  の3点を通る  $x$  の2次多項式で表現する:

$$\hat{F}(x) = \hat{a}(x - x_i)^2 + \hat{b}(x - x_i) + f_i^n. \quad (11)$$

連続の条件:

$$\hat{F}(x_{i-1}) = \hat{F}_i^-(x_{i-1}), \quad \hat{F}(x_{i+1}) = \hat{F}_i^+(x_{i+1}),$$

より,  $\hat{a}_i$  と  $\hat{b}_i$  が求まるので, これらを(11)に代入すると, (9)と同様にして,

$$f_i^{n+1} = f_i^n - (u \Delta t / \Delta x)(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) / 2 + (u \Delta t / \Delta x)(f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n) / 2 \quad (12)$$

を得る。これはLax-Wendroff法の定式であり,  $f_i$  と表記すると(1)より  $f_x = -f_i/u$  であるから, (12)の両辺から  $f_i^n$  を引いて  $-u \Delta t$  で割ると  $f_{x_i}^n$  は,

$$f_{x_i}^n = (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) / 2 \Delta x - (u \Delta t / \Delta x)(f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n) / 2 \Delta x \quad (13)$$

のように近似できる。  $f_{x_{i-1}}^n$  も同様に近似できる。これらを(5)(6)に代入すると  $a_i$ ,  $b_i$  が求まるので, 結局(10)から  $f_{x_i}^{n+1}$  を得る。なお,  $x$  について2次精度の差分化では(13)以外に, 中央差分法としての,

$$f_{x_i}^n = (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) / 2 \Delta x,$$

という表現も可能であるが, 精度, 安定性とも(13)の表現の方が優れているので, 本稿ではこの表現を採用する。

次に,  $(x_i, t_n)$  における  $f_i$  を  $f_i^n$  と表すと,  $f_{x_i}^n$  と  $f_{x_i}^{n+1}$  が求まっているので, これらに  $-u$  を掛けると(2)より,

$$f_{x_i}^n = -u f_{x_i}^n, \quad (14)$$

$$f_{x_i}^{n+1} = -u f_{x_i}^{n+1} \quad (15)$$

がそれぞれ求まる。

今度は, 位置  $x_i$  における  $f$  について  $t_n$  と  $t_{n+1}$  の間を  $t$  の2次多項式で近似する:

$$G_{n+1}(t) = c_{n+1}(t - t_{n+1})^2 + f_i^{n+1}(t - t_{n+1}) + f_i^{n+1} \quad (16)$$

先と同様に,  $t_n$  では下記の連続の条件を満たす必要がある:

$$G_{n+1}(t_n) = G_n(t_n), \quad (17a)$$

$$dG_{n+1}(t_n)/dt = dG_n(t_n)/dt. \quad (17b)$$

ここで(17b)の条件を用いると,  $c_{n+1}$  が  $f_i^n$  と  $f_i^{n+1}$  で表現できるので, それぞれ(14)と(15)を代入して,

$$c_{n+1} = (f_i^{n+1} - f_i^n) / 2 \Delta t = -u(f_{x_i}^{n+1} - f_{x_i}^n) / 2 \Delta t \quad (18)$$

を得る。そして, (16)に  $t = t_n = t_{n+1} - \Delta t$  を代入すると,

$$f_i^{n+1} = c_{n+1} \Delta t^2 + f_i^{n+1} \Delta t + f_i^n, \quad (19)$$

となるので,  $c_{n+1}$  に(18),  $f_{x_i}^{n+1}$  に(15)を代入すれば最終的に目的とする未来値  $f_i^{n+1}$  を求めることができる。

なお, あえて(19)の表現を用いなくても(13)で得た  $f_{x_i}^n$  を同様にして得た  $f_{x_{i-1}}^n$  とともに(9)に代入すれば  $f_i^{n+1}$  を求めることができるが精度は良くない。また, (16)を2次ではなく3次の多項式としても  $f_i^{n+1}$  が求まるが, 2次に比べて精度が良くない。さらに, 位置  $x_i$  における  $f$  について  $t_n$  と  $t_{n+1}$  の間ではなく,  $t_{n-1}$  と  $t_n$  の間を  $t$  の2次多項式, 3次多項式で近似して  $f_i^{n+1}$  を求めてみたが精度は良くなかった。これら以外の定式化も可能であろうが,  $x$  について2次の精度という制約があるため,  $f_{i-1}^n$ ,  $f_i^n$ ,  $f_{i+1}^n$  のみを使用した定式では本稿の方法が精度としては最良の部類に入るものと推察される。

この手法は陽解法であり, CIP法と同様にCFL条件を満たす必要がある。付録に計算の手順とFORTRANのコードを付けたので興味があれば参考にしたい。この方法を簡易型CIP法 (Simplified CIP), もしくは省メモリ型のCIP法 (memory Saved CIP), 略してSCIP (スキップ) 法と呼ぶことにする。

## 結 果

SCIP法の性能について述べる。以下の移流方程式(2)の計算は  $x = x_i$  ( $i = 1, \dots, 200$ ),  $x = u = 1$ とし、周期境界条件の下で  $t$ を適当に変えて実施した。

## 他の計算法との比較

Fig. 1は各種移流スキームのうち、前進風上差分法、空間2次精度のスキームとして代表的なLax-Wendroff法と調整型Lax-Wendroff法(Boris and Book, 1973, 1975)、空間3次精度のスキームとして最近多くの海洋循環モデル(e.g., Hasumi and Sugimoto, 1999)で使用されているQUICKEST法(Leonard, 1979; この計算法の多次元版はUTOPIA法と呼ばれる(Leonard *et al.*, 1993, 1994))、そしてCIP法と今回提案するSCIP法による計算結果である。ここで、調整型Lax-Wendroff法は(11)の計算を2段階に分けて行うもので、第1段階で疑似分散に伴う振動を抑制するために拡散項を付加し、第2段階で過度の平滑化を避けるために反拡散項(負の拡散項)を付加する方法である。なお、図は  $t = 0.2$ とし400時間ステップ目の結果である。

風上差分法は疑似拡散が顕著で(Fig. 1(a)), Lax-Wendroff法は特に分布が急激に立ち上がる手前の  $x = 60 \sim 90$ で疑似分散による振動が顕著である。初期分布が正であるにも関わらず負の分布を呈しており、 $x = 110$ と  $x = 130$ におけるオーバーシュートも大きい(Fig. 1(b))。調整型Lax-Wendroff法は最適解を得るようにパラメータを調節しているため精度が良いが(Fig. 1(c))、後述するようにCourant数  $C = u \Delta t / \Delta x$ が大きいと付加した拡散項が効きすぎてしまう。QUICKEST法は分布の急変箇所わずかながらオーバーシュートとアンダーシュートが見られるがほぼ初期の分布を維持している(Fig. 1(d))。CIP法もQUICKEST法と同様に分布の急変箇所わずかなオーバーシュ

トとアンダーシュートが見られるが、QUICKEST法よりも初期の分布を維持している(Fig. 1(e))。SCIP法はQUICKEST法やCIP法ほど初期の分布を維持していないものの特別な調整を施していない2次精度のスキームとしては非常に精度が良いことが分かる(Fig. 1(f))。この場合、オーバーシュートとアンダーシュートが無い点でQUICKEST法やCIP法よりも精度が良いくらいである。解の分布は調整型Lax-Wendroff法の分布と似ているが、ピークに着目すればSCIP法の方が疑似拡散の影響が小さいことが分かる。

Table 1は初期値がGauss型分布  $f(x, 0) = \exp(-(x - 60)^2)$ 、時間ステップ幅が  $\Delta t = 0.2$  ( $C = 0.2$ )の場合について、各スキームで解いた1,000時間ステップ目における  $f(x, t)$ の最大値  $f_{\max}$ と最小値  $f_{\min}$ をまとめたものである。初期値では  $f_{\max} = 1$ ,  $f_{\min} = 0$ であるが、時間ステップの増加に伴い疑似拡散の影響で  $f_{\max}$ が減少し、Lax-Wendroff法、QUICKEST法では疑似分散の影響でアンダーシュートが生じ、 $f_{\min} < 0$ となっている。

## Courant数の増加に伴う疑似拡散の影響

Fig. 2は  $C = 0.1 \sim 0.8$ に対するSCIP法による200時間ステップ目の解である。 $C$ が大きいほど疑似拡散の影響は大きくなる。 $C = 0.1$ では分布の急変箇所CIP法と同様にオーバーシュートとアンダーシュートが見られる。これは空間分布を3次多項式で近似し、連続の条件で多項式の係数を決めたことに起因する(Fig. 2(a))。初期分布は  $x = 14, 15, 30, 31, 50, 51$ において滑らかに設定していない。つまりこの点では空間微分の連続の条件は成立しないからである。 $C = 0.2$ でオーバーシュートとアンダーシュートが見られないのは、疑似拡散の影響で分布が平滑化されるためである。なお、 $C = 0.5$ では調整型Lax-Wendroff法による分布を重ねてみた(Fig. 2(e))。 $C = 0.2$ では適切だった平滑化も  $C = 0.5$ では効き過ぎるようである。しかも、調整型Lax-Wendroff法は  $C = 0.6$ で計算不安定になる。

Table 1. Comparison of advection schemes

scheme	accuracy	$f_{\max}^{\&}$	$f_{\min}^{\&}$
Upwind	1 <sup>st</sup> order	0.24	0.00
Lax-Wendroff	2 <sup>nd</sup> order	0.74	-0.30
Adjusted Lax-Wendroff	2 <sup>nd</sup> order*	0.77	0.00
QUICKEST	3 <sup>rd</sup> order	0.83	-0.04
CIP	2 <sup>nd</sup> order <sup>#</sup>	0.95	0.00
SCIP	2 <sup>nd</sup> order	0.80	0.00

\*: with a diffusive and an antidiffusive terms, #: with spatial derivatives, &:  $f_{\max}$  and  $f_{\min}$  are the maximum and minimum value of the solution at 1000 time-step for the hyperbolic equation with initial distribution of  $f = \exp(-0.01(x - 60)^2)$ , respectively.

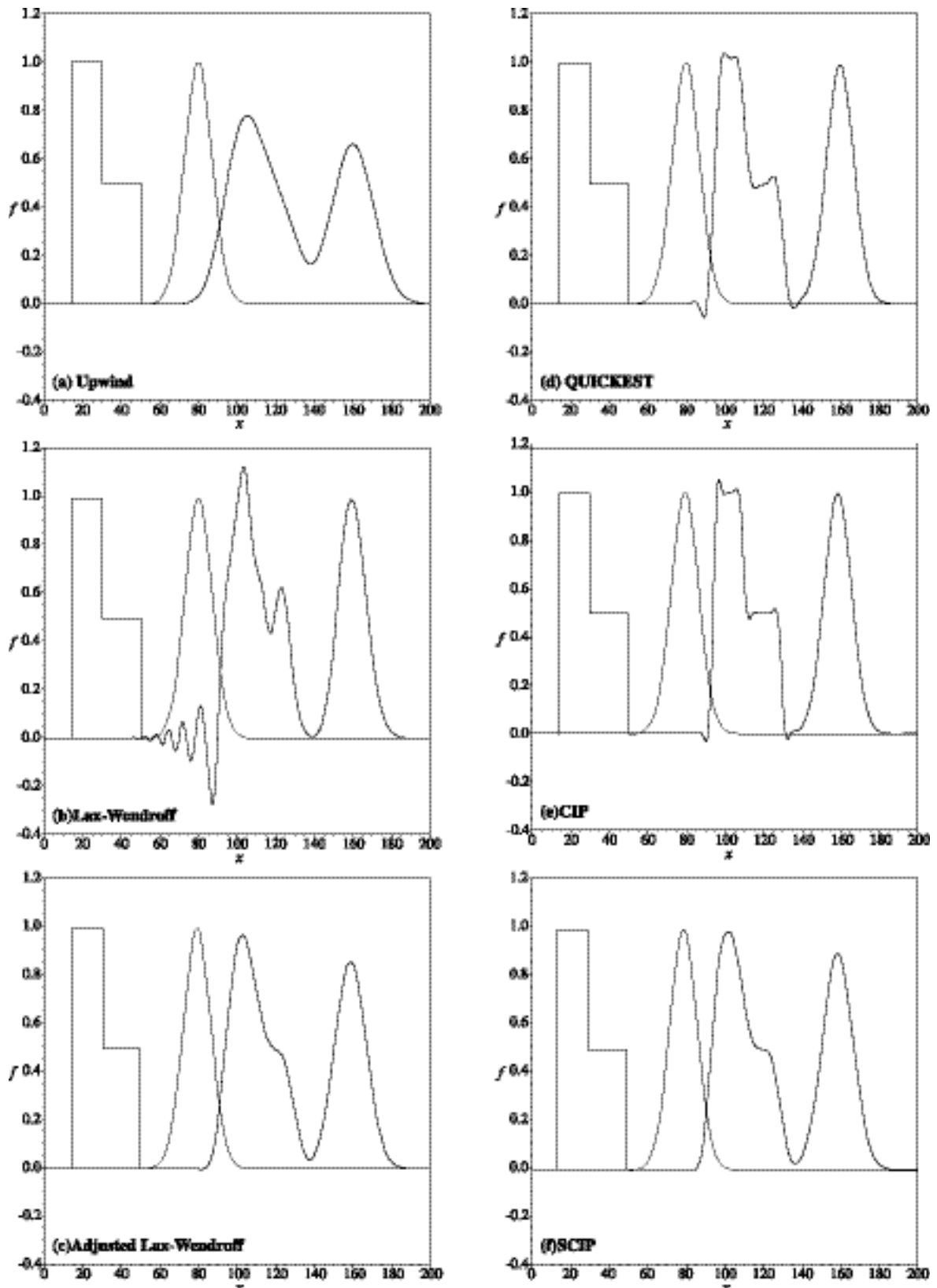


Fig. 1. Comparison of solutions for the hyperbolic equation (1) calculated by the upwind scheme (a), the Lax-Wendroff method (b), the adjusted Lax-Wendroff method (c), the QUICKEST method (d), the CIP method (e), and the SCIP method (f), where  $x = u = 1$ ,  $t = 0.2$  and the cyclic boundary condition was set. Thin and thick lines denote the spatial distributions at the initial time and at 400 time-step, respectively.

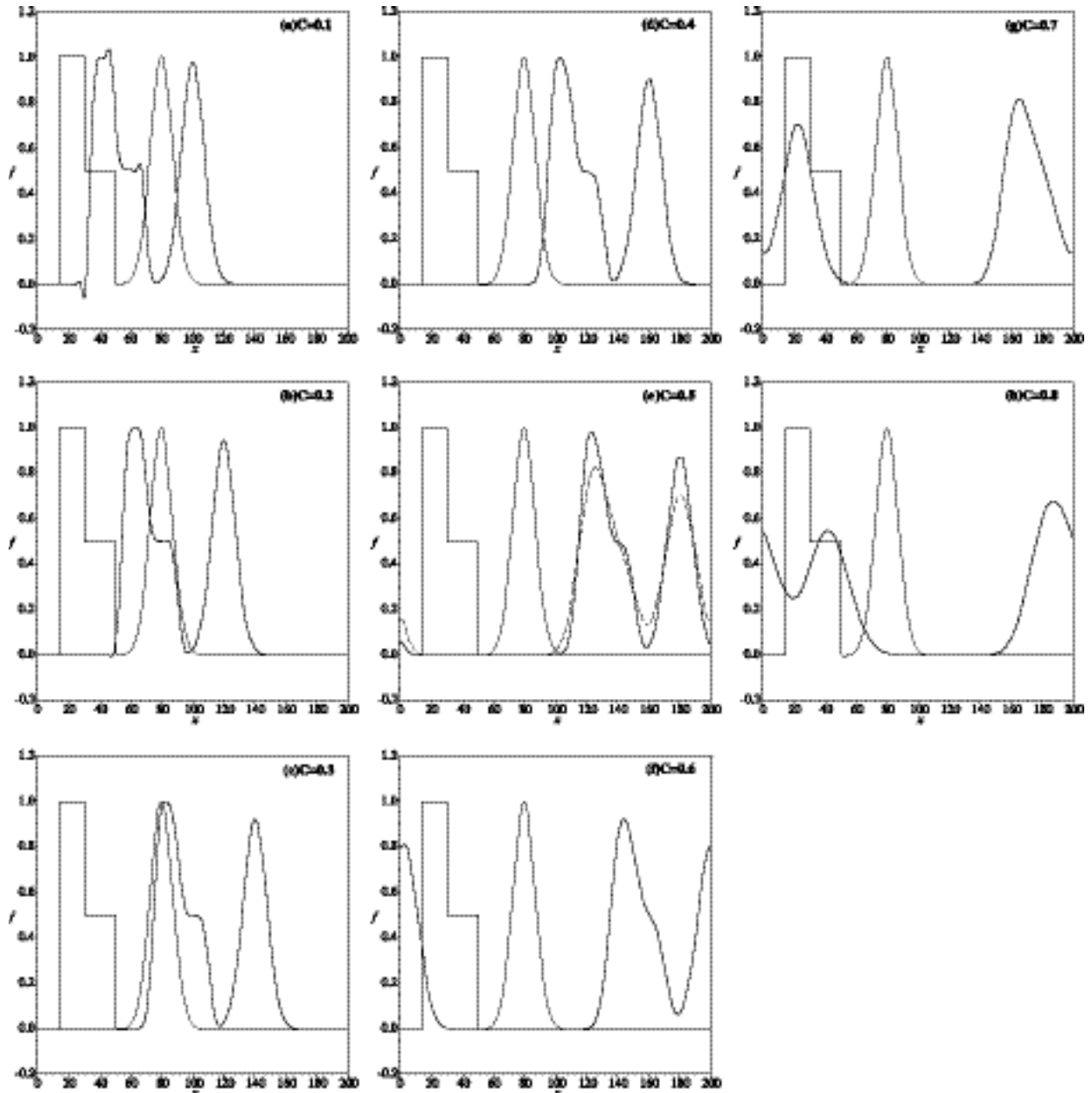


Fig. 2. Spatial distributions of solutions at 200 time-step calculated by the SCIP method for  $C=0.1-0.8$ . Thin and thick lines denote the initial distributions and the solutions, respectively. Dashed line in Fig. 2(e) denotes the solution calculated by the adjusted Lax-Wendroff method.

SCIP法は $C=0.5$ では初期分布をある程度維持しているが、 $C=0.7$ ではもはや原型をとどめていない (Fig. 2g)。一方、図には示さないが、CIP法は $C=0.8$ でも初期分布を維持している。

Fig. 3は、初期値として $f(x,0)=\exp(-0.01(x-60)^2)$ を与えた場合について、200, 400, 800, 2000時間ステップ目における $f(x,t)$ の最大値 $f_{\max}$ を示す。 $C$ の増加に伴い疑似拡散の影響で $f_{\max}$ が減少している。 $C=0.5$ では200時間ステップ目で1割、400時間ステップ目で2

割、800時間ステップ目で3割減衰している。 $C=0.1$ でも2000時間ステップ目には約2割減衰している。特に $C>0.5$ で減衰が顕著であることに注意されたい。SCIP法の使用に際してはこれらの点を念頭に置く必要があるだろう。ただし、SCIP法は1段階の計算で済み、CFL条件さえ満たせば計算不安定にはならない。また、他の低次精度のスキームに比べて格段に精度が良いことを改めて指摘しておきたい。

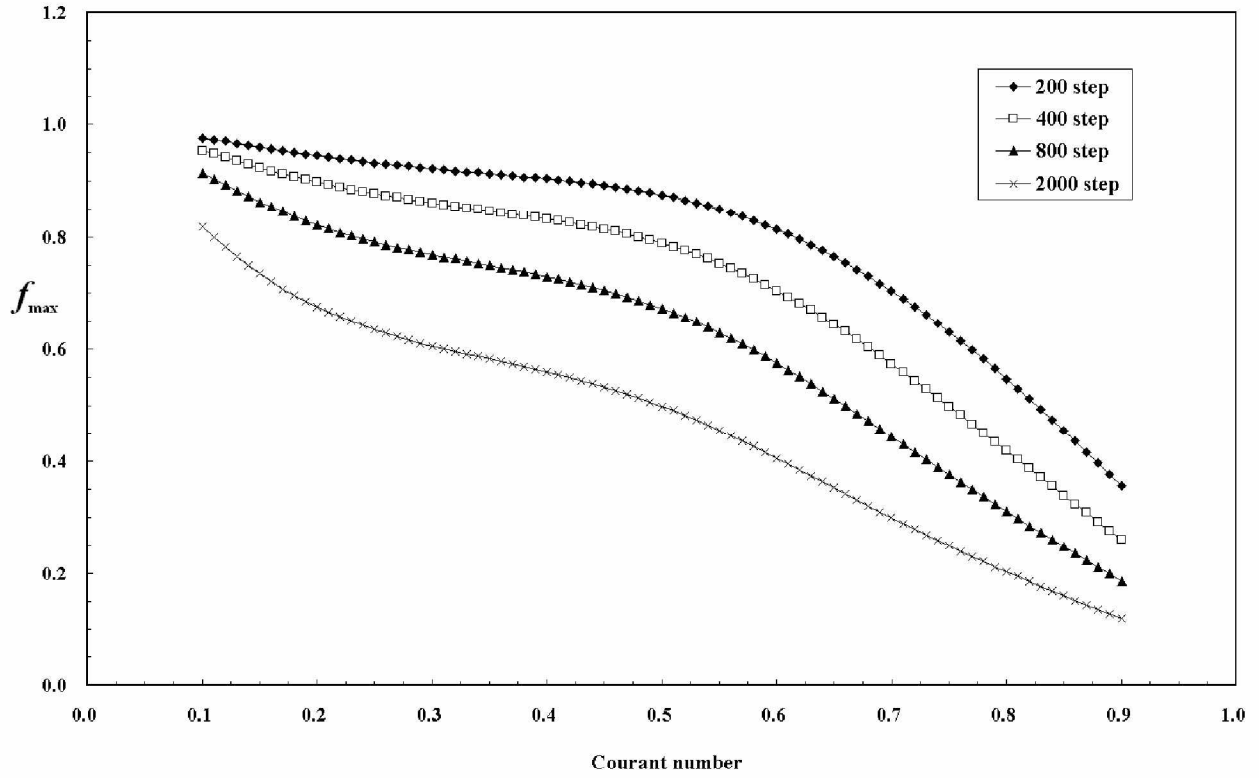


Fig. 3. Attenuation of the maximum value of the solution  $f_{\max}$  with increasing of Courant number, where the initial distribution is  $f(x,0) = \exp(-0.01(x - 60)^2)$ .

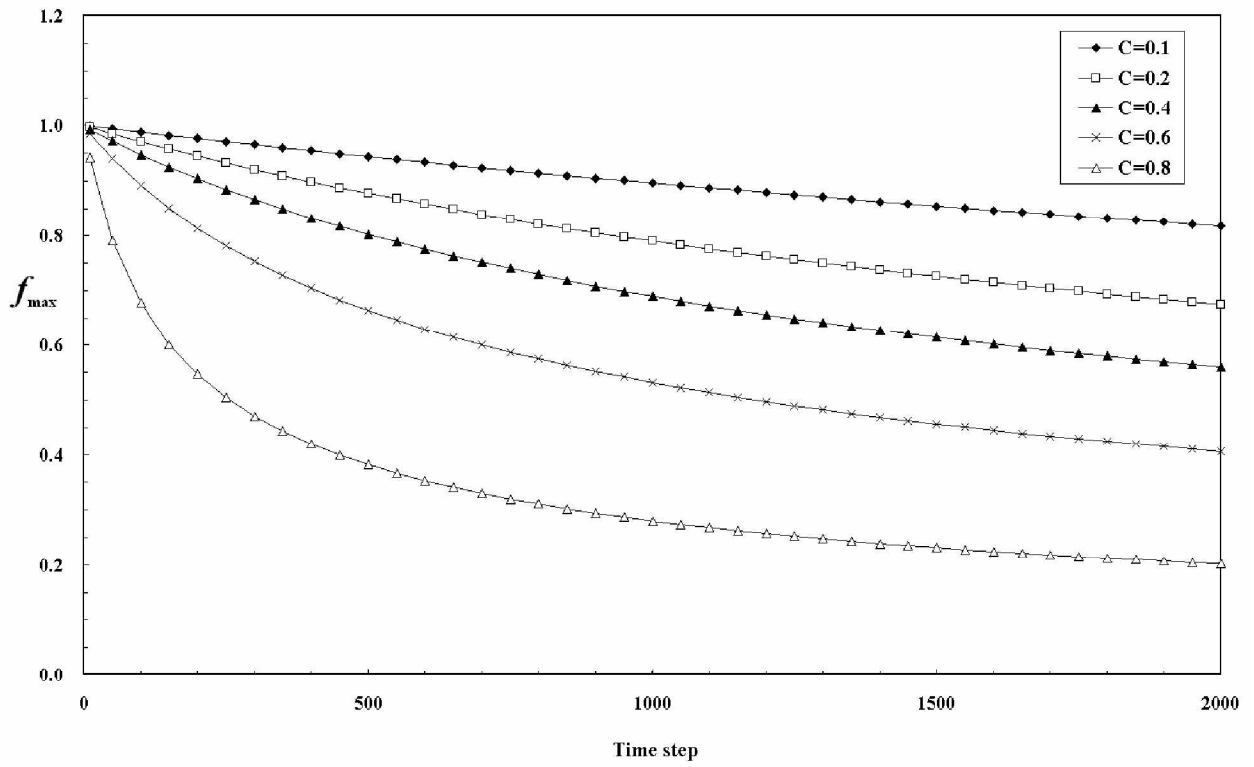
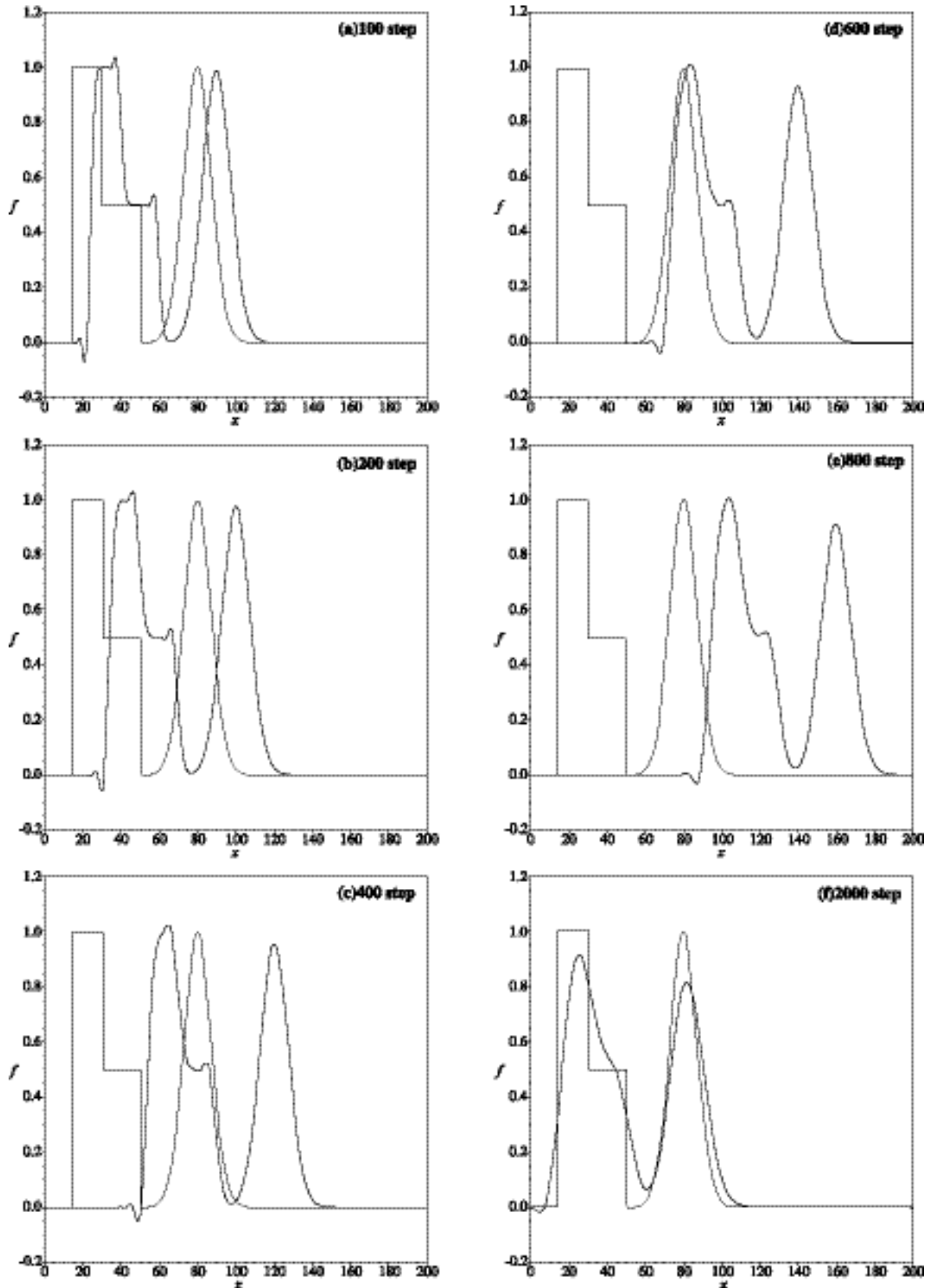


Fig. 5. Attenuation of the maximum value of the solution  $f_{\max}$  with increasing of time-steps, where the initial distribution is same as in Fig. 3.



**Fig. 4** Spatial distributions of solutions calculated by the SCIP method at 100 time-step (a), at 200 time-step (b), at 400 time-step (c), at 600 time-step (d), at 800 time-step (e), and at 2000 time-step (f) for  $C=0.1$ . Thin and thick lines denote the initial distributions and the solutions, respectively.



## 時間ステップの増加に伴う疑似拡散の影響

Fig. 4 は,  $C=0.1$  に対する 100, 200, 400, 600, 800, 2000 時間ステップ目の解の空間分布である。前項でも指摘したように時間の経過に伴い疑似拡散の影響が累積して分布が次第に滑らかになり, ピーク値の減少が目立ってくる。Fig. 5 は前項と同じ Gauss 型の初期分布を与えたときの  $f_{\max}$  の変化である。時間ステップの増大とともに  $f_{\max}$  が減少しているが,  $C$  が大きくなると初期の減衰が大きくなるのが特徴である。

## 結 言

CIP法をもとに簡便な移流スキームを新たに開発した。この計算法は空間について 2 次の精度であり, 従来のスキームのような調整項を導入していないにも関わらず, 低次精度のスキームとしては疑似拡散や疑似分散の影響が小さく, 高い精度を有する。計算は 1 段階で済むため非常に効率的であり, しかも計算が安定しており高い汎用性を持つ。ただし, 低次精度のスキームのため, Courant 数や時間ステップが増大すると疑似拡散の影響が目立ってくる点に注意する必要がある。このスキームは既存の各種数値モデルに容易に適用でき, 特に海洋生態系モデルや卵・仔稚魚の移流・拡散モデルの精度向上が期待される。

## 謝 辞

本研究の遂行に当たり九州大学教授の増田 章博士には有益なご議論をしていただき, また本稿の執筆に際して中央水産研究所研究員の廣江 豊氏には多大なご協力を賜った。なお, 本研究は農林水産省の現場即応研究「産卵場形成と幼稚仔魚の輸送環境の変化が加入量変動に及ぼす影響の解明(東シナ海漁業資源 FRECS)」の課題「海洋流動場モニタリングシステムの開発」で実施した研究の一部であり, 文部科学省の宇宙開発関係在外研究員制度で派遣されたドイツのマックス・プランク気象学研究所で実施した研究の一部である。

## 文 献

- Boris J. P., and Book D. L., 1973: Flux corrected transport. I. SHASTA, a fluid transport algorithm that works. *J. Comput. Phys.*, **11**, 38-69.
- Boris J. P., and Book D. L., 1975: Solution of the continuity equations by the method of flux corrected transport. *Methods Comput. Phys.*, **16**, 85-129.
- Colella P., and Woodward P. R., 1984: The Piecewise Parabolic Method (PPM) for gas-dynamical simulations. *J. Comput. Phys.*, **54**, 174-201.
- Farrow D. E., and Stevens D. P., 1995: A new tracer advection scheme for Bryan Cox type ocean general circulation model. *J. Phys. Oceanogr.*, **25**, 1731-1741.
- Gerdes R., Koberle C., and Willebrand J., 1991: The influence of numerical advection schemes on the results of ocean general circulation models. *Clim. Dyn.*, **5**, 2121-226.
- Harten A., 1983: High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.*, **49**, 357-393.
- Harten A., 1987: Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory scheme III. *J. Comput. Phys.*, **71**, 231-303.
- Hasumi H., and Sugimoto N., 1999: Sensitivity of a global ocean general circulation model to tracer advection schemes. *J. Phys. Oceanogr.*, **29**, 2730-2740.
- Hecht M. W., Holland W. R., and Rasch P. J., 1995: Upwind-weighted advection schemes for ocean tracer transport: An evaluation in a passive tracer context. *J. Geophys. Res.*, **100**, 29763-29778.
- Kantha L. H., and Clayson C. A., 2000: Numerical models of oceans and oceanic processes. Academic Press, San Diego, pp.168-181.
- Kishi M. J., Motono H., Kashiwai M., and Tsuda A., 2001: An ecological-physical coupled model with ontogenetic vertical migration of zooplankton in the Northwestern Pacific. *J. Oceanography*, **57**, 499-507.
- Leonard B. P., 1979: A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **19**, 59-98.
- Leonard B. P., MacVean M. K., and Lock A. P., 1993: Positivity preserving numerical schemes for multidimensional advection. NASA Tech. Memo. 106055, ICOMP-93-05, Lewis Research Center, 62pp.
- Leonard B. P., MacVean M. K., and Lock A. P., 1994: The flux-integral method for multidimensional convection and diffusion. NASA Tech. Memo. 106679, ICOMP-94-13, Lewis Research Center,

- 27pp.
- Mellor G. L., 1996: Users guide for a three-dimensional primitive equation, numerical ocean model, Program in Atmospheric and Ocean Sciences, Princeton University, Princeton, 41pp.
- Pacanowski R. C., 1995: MOM2 Documentations, Users guide and reference manual, Ocean Technical Report 3, Geophysical Fluid Dynamics Laboratory, Princeton, 233pp.
- Press W. M., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., and Flannery B. P., 1992: Numerical recipes in FORTRAN, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, New York, pp. 825-838.
- Takewaki H., Nishiguchi A., Yabe T., 1985: Cubic Interpolated Pseudo-particle method (CIP) for solving hyperbolic-type equations. *J. Comput. Phys.*, **61**, 261-268.
- 矢部 孝, 1992: 面倒臭がり屋の数値流体入門, 日本物理学会誌, **47**, 18-25.
- 矢部 孝, 観山正見, 椛島成治, 1992: パソコンによるシミュレーション物理, 朝倉書店, 東京, pp. 179.
- Yamanaka Y., Furue R., Hasumi H., and Sugihara N., 2000: Comparison of two classical advection schemes in a general circulation model. *J. Phys. Oceanogr.*, **30**, 2439-2451.

## Appendix

SCIP法の計算手順 (時間ステップごとに下記を繰り返す)

1. 現在値  $f_{i-1}^n, f_i^n, f_{i+1}^n$  から(13)より  $i$  における空間微分値  $f_{x_i}^n$  を求め, 同様に  $i-1$  における空間微分値  $f_{x_{i-1}}^n$  を求める。
2. 現在値  $f_{i-1}^n, f_i^n$  と 1. で求めた空間微分値  $f_{x_{i-1}}^n, f_{x_i}^n$  を用いて(5), (6)からそれぞれ  $a_i, b_i$  を求める。
3. 現在値  $f_i^n$  と 2. で求めた  $a_i, b_i$  を用いて(10)から空間微分の未来値  $f_i^{n+1}$  を求める。
4. 空間微分の現在値  $f_{x_i}^n$  を(14)に代入して時間微分の現在値  $f_i^n$  を求め, 3. で求めた空間微分の未来値  $f_{x_i}^{n+1}$  を(15)に代入して時間微分の未来値  $f_i^{n+1}$  を求める。
5. 4. で求めた時間微分値  $f_i^n, f_i^{n+1}$  を(18)に代入して  $c_{n+1}$  を求め, これらを(19)に代入して最終的に未来値  $f_i^{n+1}$  を得る。

SCIP法のFortranコード

```
c////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
c   コード名: scip.f
c   内容: 1次元の移流方程式を簡易CIP法(SCIP法)で解く.
c   作製: 小松幸生   2002年7月8日
c////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
```

```
program sim
```

```
dimension fn(300)    ! 関数の現在値
dimension ff(300)   ! 関数の未来値
```

```

c -----
cd パラメータの設定
c -----

    u = 1.           ! x方向の速度
    dx = 1.         ! xの格子間隔
    im = 200        ! xの格子点数
    dt = 0.5        ! 時間間隔
    lm = 200        ! 時間ステップ数
    c = abs(u)*dt/dx ! Courant数

c -----
cd 初期値の設定
c -----

    do i= 1, im
      fn(i) = exp(-(0.01*(i-80)*(i-80))) ! Gauss分布
    end do
    do i= 15, 30
      fn(i) = 1.           ! 箱
    end do
    do i= 31, 50
      fn(i) = 0.5         ! 箱
    end do

    do i= 1, im
      ff(i) = fn(i)
    end do

c -----
cd 時間積分
c -----

    do l= 1, lm
      call scip(fn,ff,u,dx,dt,im) ! SCIP法の呼び出し
      do i= 1, im
        fn(i) = ff(i) ! 解の更新
      end do
    end do

c -----
cd 出力
c -----

    do i= 1, im
      write(10,*) i,fn(i)
    end do

    stop
    end

```

```

c*****
subroutine scip(fn,ff,u,dx,dt,im)

dimension fn(im),ff(im)
c  = = = = =

x = -u*dt
gim1 = 0. ! dfn/dx at 1 の設定
do i = 2, im-1
  gi = ( 0.5* (fn(i+1) -fn(i-1))
& + 0.5*x*(fn(i+1)-2.*fn(i)+fn(i-1))/dx )/dx ! dfn/dx at i
  gn = -u * gi ! dfn/dt at i
  a = ( gi+gim1 - 2.*(fn(i)-fn(i-1))/dx)/(dx*dx)
  b = (2.*gi+gim1 - 3.*(fn(i)-fn(i-1))/dx)/ dx
  gi = (3.*a*x + 2.*b)*x + gi ! dff/dx at i
  gim1 = gi ! dfn/dx at i-1 に更新
  gf = -u * gi ! dff/dt at i
  ff(i) = -(0.5*(gf-gn)/dx)*dt*dt + gf*dt + fn(i)
end do

c -----
cd 周期境界条件
c -----

ff(1 ) = ff(im-1)
ff(im) = ff(2 )

return
end

```