

コホート解析に用いる漁獲方程式の解法と その精度の検討

石岡 清英・岸田 達

Studies on the Algorithm for Solving the Catch Equation and Its Accuracy

Kiyohide ISHIOKA and Tatsu KISHIDA

The approximate equation for POPE's function, $f(F, M) = \frac{(F+M) \cdot \{1 - \exp(-F)\}}{F \cdot [1 - \exp\{- (F+M)\}]}$ which is used for cohort analysis was examined mathematically. NAGAI's equation, $f_N = \frac{M}{1 - \exp(-M)}$ is more approximate to the true value of $f(F, M)$ than POPE's equation, $f_P = \exp(M/2)$.

The new algorithm to solve the catch equation was proposed. This method is the so-called successive substitution method, and it uses NAGAI's approximate value as the first approximation. It was clarified that in normal conditions, four or less times of iteration satisfies the convergence criteria, viz the error of the approximation is one percent or less.

The applicable ranges of F and M for those approximate functions and the mentioned above were illustrated.

コホート解析 (cohort analysis) は JONES (1961, 1964), MURPHY (1965), GULLAND (1965), POPE (1972) らが発展させてきた, 自然死亡係数と年齢別漁獲尾数から資源尾数や漁獲死亡係数を推定する方法であり, 漁獲努力量よりも漁獲尾数を重視するところに特色がある。瀬戸内海漁業のように, 単一魚種が多くの漁業種類で漁獲されるため, 努力量の把握および標準化が困難であり, かつ漁獲圧力が強いような場合の加入量を推定する方法として, コホート解析は使いやすい方法と言えよう。石岡・猪子 (1982) はそれを応用した現実のデータへのあてはめ方の一例を報告しているが, 計算手法, 精度についての理論的検討が充分ではない。ここではそれらの点について報告する。

この報告の一部は1982年日本水産学会秋季大会 (福山) で発表した。

本研究を行うにあたり貴重な助言をいただいた東京大学海洋研究所資源解析部門教授田中昌一博士に御礼申しあげます。

漁獲方程式の展開

BARANOV (1918) の漁獲方程式 (catch equation) および生残関係式は(1), (2)式で示される。

$$C_i = N_i \cdot \frac{F_i}{F_i + M_i} \cdot [1 - \exp\{-(F_i + M_i)\}] \quad (1)$$

$$N_{i+1} = N_i \cdot \exp\{-(F_i + M_i)\} \quad (2)$$

ここで記号は i 期における次の値を示す。

C_i : 漁獲尾数

N_i : 期間の初めの資源尾数

F_i : 漁獲死亡係数

M_i : 自然死亡係数

コホート解析には前進法と後退法の2通りの計算方法がある。前進法の方が理解しやすいため、ここではこれをもとに説明を行い、後退法の場合については後でふれることとする。前進法では M_i , C_i , N_i を与えて、 F_i , N_{i+1} を求める。なおこれ以降添字 i は混乱をまねく場合を除き省略する。

POPE (1972) は(1), (2)式を次のように変形した。

$$N_i = N_{i+1} \cdot \exp(M) + f(F, M) \cdot C \quad (3)$$

$$F = \log\left(\frac{N_i}{N_{i+1}}\right) - M \quad (4)$$

ここで関数 $f(F, M)$ は F と M の値によってきまる次式で示される。

$$f(F, M) = \frac{(F+M) \cdot \{1 - \exp(-F)\}}{F \cdot [1 - \exp\{-(F+M)\}]} \quad (5)$$

関数 $f(F, M)$ の近似式

永井 (1980) は関数 $f(F, M)$ の型と性質を検討し、 M を一定とした時次の極限值を持つことを示している。

$$\lim_{F \rightarrow \infty} f(F, M) = 1 \quad (6)$$

$$\lim_{F \rightarrow 0} f(F, M) = \frac{M}{1 - \exp(-M)} \quad (7)$$

ところで(7)式は現実的な F の範囲では(5)式の近似式として用いることができる。以下においては(8)式を永井の近似式 f_N と呼ぶことにする。

$$f_N = \frac{M}{1 - \exp(-M)} \quad (8)$$

一方 POPE (1972) は $f(F, M) \approx \exp(M/2)$ という近似式を用いたが、(8)式が $\exp(M/2)$ で近似できることは次のように式の展開を行えばわかりやすい。

(8)式の分子、分母に $\exp(M/2)$ を乗じる。

$$f_N = \exp\left(\frac{M}{2}\right) \left\{ \frac{M}{\exp\left(\frac{M}{2}\right) - \exp\left(-\frac{M}{2}\right)} \right\} \quad (9)$$

ここで MACLAURIN 級数より, $\exp(M/2)$, $\exp(-M/2)$ は次のように展開できる。

$$\exp\left(\frac{M}{2}\right) = 1 + \frac{M}{2} + \frac{M^2}{8} + \frac{M^3}{48} + \frac{M^4}{384} + \dots \quad (10)$$

$$\exp\left(-\frac{M}{2}\right) = 1 - \frac{M}{2} + \frac{M^2}{8} - \frac{M^3}{48} + \frac{M^4}{384} - \dots \quad (11)$$

したがって(9)式は次のように変形できる。

$$f_N = \exp\left(\frac{M}{2}\right) \cdot \left[2 \cdot \left\{ \frac{M}{2} + \frac{M^3}{48} + \frac{M^5}{3840} + \dots \right\} \right] \quad (12)$$

ここで M が充分小さければ分母の $(M^3/48)$ 以下の項は無視することができ次式が導かれる。

$$f_N \doteq \exp\left(\frac{M}{2}\right) \quad (13)$$

すなわち POPE (1972) が示した関数 $f(F, M)$ の近似式 f_P になる。

$$f_P = \exp\left(\frac{M}{2}\right) \quad (14)$$

なお田中 (1960, 1975) および PALOHEIMO (1961) は全減少係数 Z について次式が成立することを述べている。

$$\frac{Z}{1 - \exp(-Z)} \doteq \exp\left(\frac{Z}{2}\right)$$

この式は Z を M と置き換えれば永井の近似式と POPE の近似式がほぼ等しいことを示している。逆にこの関係を利用すれば(5)式は次のように簡単に POPE 式に変換できる (田中, 私信)。

$$\begin{aligned} f(F, M) &= \frac{(F+M)/[1 - \exp\{- (F+M)\}] }{F/[1 - \exp(-F)]} \\ &\doteq \frac{\exp\{(F+M)/2\}}{\exp(F/2)} \\ &= \exp\left(\frac{M}{2}\right) \end{aligned}$$

また永井 (1980) は POPE および AGGER *et al.* による別の証明法を示している。

F の値を X 軸, $f(F, M)$ の値を Y 軸にとり $M=0.35$ の場合について関数 $f(F, M)$ の曲線と 2 つの近似式 f_N , f_P の値を Fig. 1 に示す。関数 $f(F, M)$ は単調減少関数であるため, f_N や f_P は F が大きくなるほど大きな誤差を生じることになる。なお $M \neq 0$ なら常に $f_P > f_N$ である。

f_N , f_P により $f(F, M)$ を近似する場合の相対誤差を, それぞれ E_N , E_P (パーセント) とし, 次式で計算することにする。

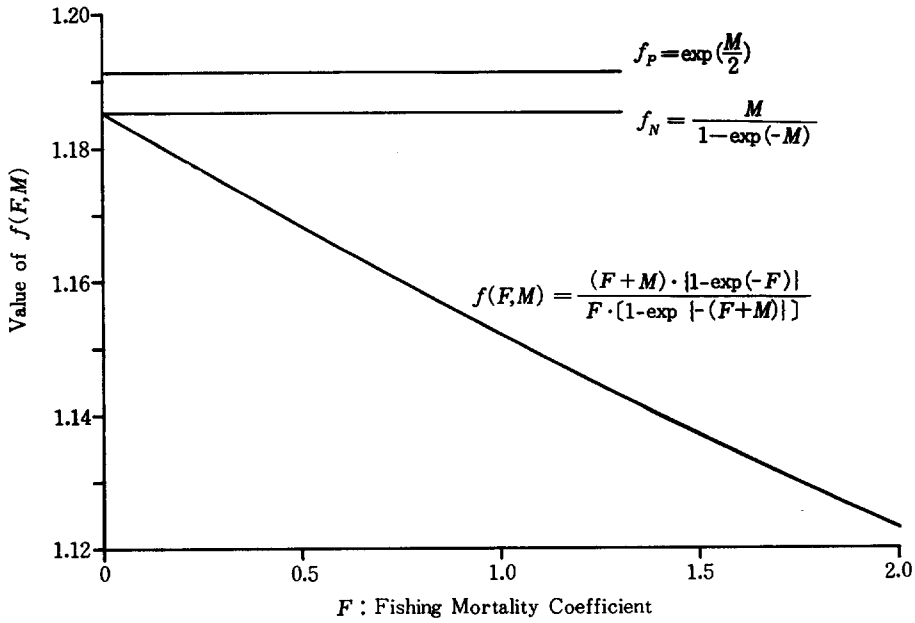


Fig. 1 Relationship between function $f(F, M)$ and F (fishing mortality coefficient). M (Natural mortality coefficient) is arbitrarily set at 0.35 in this figure. In this case, f_P (POPE's approximate value) = 1.191, f_N (NAGAI's approximate value) = 1.185, without reference to the value of F .

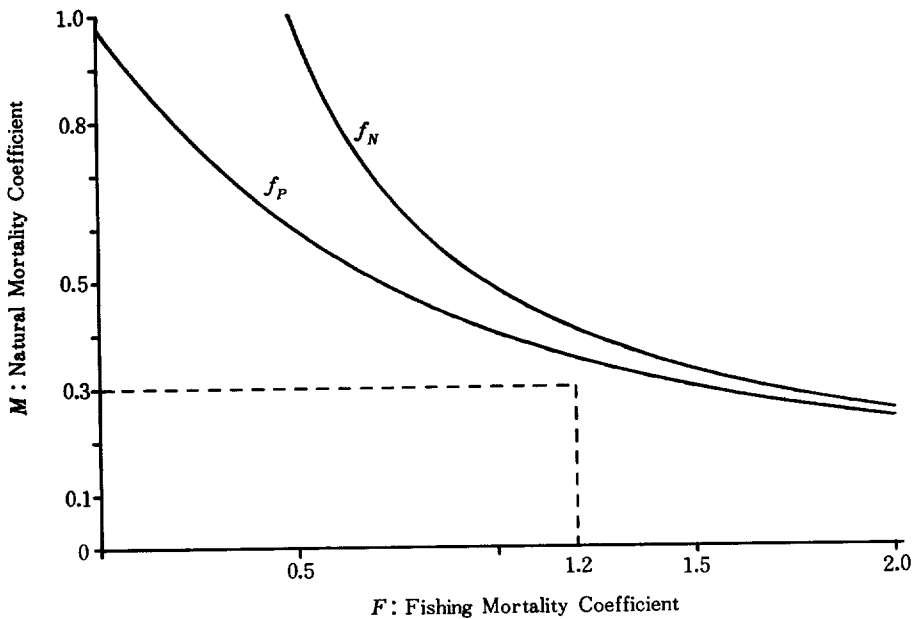


Fig. 2 Ranges of F and M in which the relative error of POPE's (f_P) and NAGAI's (f_N) formulae to the true value of $f(F, M)$ is four percent or less (below the curve). The area surrounded by dotted lines shows the range in which POPE's formula is used in general.

$$(5) E_N = 100 \times \{f_N / f(F, M) - 1\}$$

$$(6) E_P = 100 \times \{f_P / f(F, M) - 1\}$$

Fig. 2 に E_N , E_P が 4 パーセント以下になる F , M の範囲を示す。曲線の下側がその範囲である。破線は POPE (1972) がその近似式の誤差が 4 パーセント以下と述べている $M \leq 0.3$, $F \leq 1.2$ の範囲である。 f_N の方が f_P より誤差が少なく、同じ許容誤差であれば広い F , M の範囲で適用できる。

逐次代入法による漁獲方程式の解法

漁獲方程式における F , N_{i+1} , $f(F, M)$ を厳密に求める方法として 2 分法や NEWTON-RAPHSON 法等の反復計算法や計算機プログラムが報告されている (TOMLINSON 1971, 加藤 1978, 本間 1978 a, 永井 1980, 石岡・猪子 1982, SIMS 1982)。また計算用の数表も公表されている (畑中他 1977)。

ここでは関数 $f(F, M)$ の次の性質を考慮した逐次代入法による漁獲方程式の新しい解き方について述べる。

- 1) 関数 f は f_N と 1 の間の値をとる。
- 2) 関数 f の値は F の増加にもなって単調に減少し、1 に近づく。
- 3) 現実的な F の範囲では $\lim_{F \rightarrow 0} f(F, M)$ すなわち f_N は良い近似値となる。

$\lim_{F \rightarrow 0} f(F, M)$ は既に良い近似値であるが、さらに真の値に近い F を $f(F, M)$ に代入すればより真値に近い $f(F, M)$ が得られるはずである。また F の値の変化の割には $f(F, M)$ の値は変化しないと言える。すなわちここでの反復計算法としては次のような方法が考えられる。

関数 $f(F, M)$ の第 1 近似値 $f^{(1)}$ として f_N を用い、それを (3) 式に代入し N_{i+1} を求める。この N_{i+1} を (4) 式に代入し F の第 1 近似値 $F^{(1)}$ を求める。この $F^{(1)}$ を (5) 式に代入し関数 f の第 2 近似値 $f^{(2)}$ が求められる。これを繰り返すことにより、必要精度の関数 f および漁獲死亡係数 F が求められる。これは逐次代入法 (戸川 1972) といわれる方法で、式の形を整理すると (7) 式となる。

$$F^{(n+1)} = -\log \{1 - f(F^{(n)}, M) \cdot K\} \quad (7)$$

ここで $F^{(n)}$ は第 n 近似値, $K = C_i / N_i$, $f(F, M)$ は (5) 式である。

(7) 式は $F^{(n+1)} = \phi(F^{(n)})$ の形の反復式を示している。

なお後退法の場合の反復式は、 $K' = C_i / N_{i+1}$ として (8) 式ようになる。

$$F^{(n+1)} = -\log \{1 + f(F^{(n)}, M) \cdot K' \cdot \exp(-M)\} \quad (8)$$

(8) 式では $\{ \}$ 内が 0 または負となることはない。また前進法の場合より収束が速い。

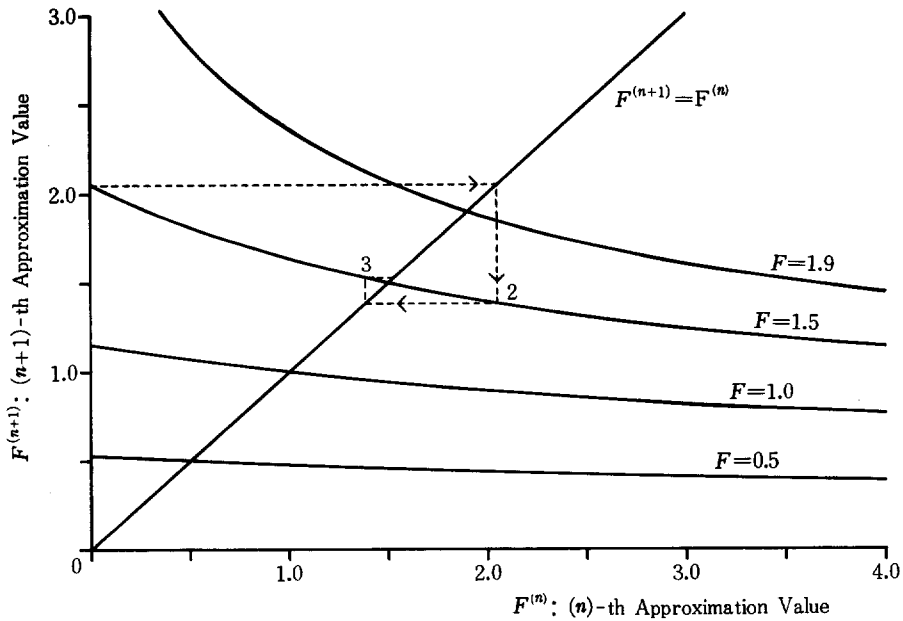


Fig. 3 Illustration of the approximation procedure to obtain $f(F, M)$ and F by the successive substitution method using the formula $F^{(n+1)} = -\log \{1 - f(F^{(n)}, M) \cdot K\}$, where $K = C_i/N_i$ (in the case of $M=1.0$). The dotted lines show the process of convergence in the case of $F=1.5$.

Fig. 3 により逐次代入法の収束の過程を説明する。

X軸を $F^{(n)}$, Y軸を $F^{(n+1)}$ とする。 $M=1.0$ の場合に真の F が 0.5, 1.0, 1.5, 1.9 について $F^{(n+1)} = -\log \{1 - f(F^{(n)}, M) \cdot K\}$ の曲線を示す。ここで用いた K は与えられた M と F を用いて (1) 式から導いた次式より求めた。

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{C_i}{N_i} \\
 &= \frac{M}{F+M} \cdot [1 - \exp\{- (F+M)\}] \quad (19)
 \end{aligned}$$

曲線は $F^{(n)} = 0 \sim 4.0$ の連続の値に対応する関数 $f(F^{(n)}, M)$ を計算し、それをういて (17) 式から $F^{(n+1)}$ を求めたものである。 $F=1.5$ の場合の収束過程を破線の矢印で示している。 $F^{(n+1)} = F^{(n)}$ の直線との交点が真の F 値であり、その時関数 $f(F, M)$ の真の値が求まる。 F の値が小さい程曲線のカーブがゆるやかであり収束が速い。

$\{1 - f(F^{(n)}, M) \cdot K\} \leq 0$ のときは対数の値が計算できず解が得られない。

逐次代入法による漁獲方程式の前進法の場合の解法を、計算機プログラムを念頭において整理して示すと次のようになる。ここで C, M は既知、 N_i は前の期間の計算で求められているとする。

1. もし $C_i = 0$ なら $F_i = 0$ としステップ 10 へ。

2. $K=C_i/N_i$ とする。
3. もし $M=0$ なら $f(F, M)=1$, $F_i=-\log(1-K)$ としステップ10へ。
4. $f^1=f_N$ すなわち式(7)の値を関数 f の初期値として与える。
5. $S=1-f^1 \cdot K$ を計算する。
6. もし $S \leq 0$ なら計算不能のため計算を打ち切る。
7. $F^2=-\log(S)$ とする。
8. $n=1, 2, 3, 4, \dots$ と次の繰り返しの操作を実行する。
 - ① $f^{(n+1)}(F^{(n)}, M)$ を式(5)で計算する。
 - ② $F^{(n+1)}=-\log(1-f^{(n+1)} \cdot K)$ を計算する。
 - ③ もし, $|f^{(n)}-f^{(n+1)}| \geq 10^{-5}$ なら①にもどる。(10^{-5} は許容誤差とする。)
9. $f(F, M)=f^{(n+1)}$, $F_i=F^{(n+1)}$ を解とする。
10. $N_{i+1}=N_i \cdot \exp\{-(F_i+M)\}$ を計算する。
11. 次の期間の計算に移り, ステップ1からを繰り返す。

Fig. 4は f_P , f_N および逐次代入法の1回目 ($n=2$), 2回目, 3回目により求められた関数 $f(F, M)$ の近似値の誤差が1パーセント以下の範囲(それぞれ曲線の下側)を示す。真の f

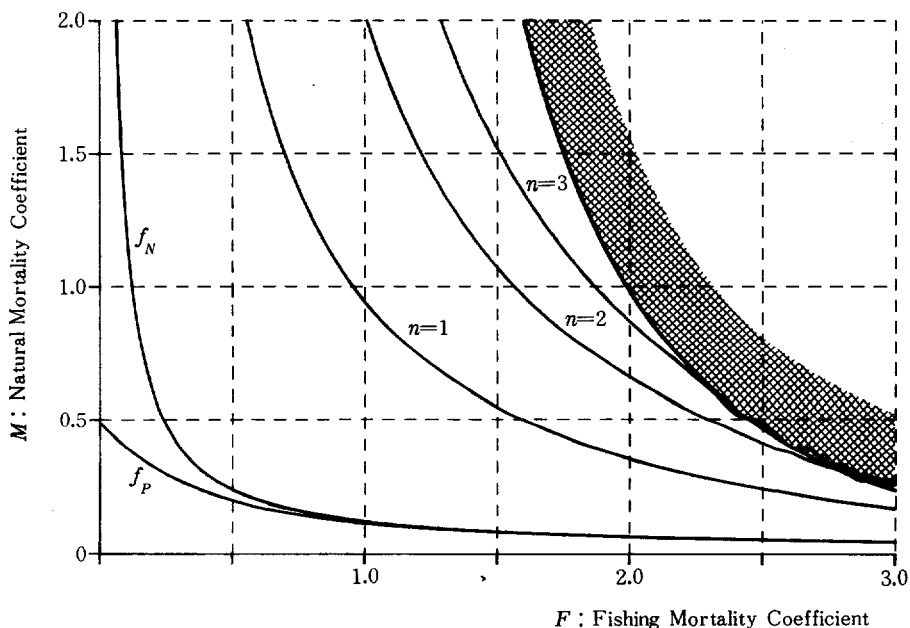


Fig. 4 Ranges in which the absolute value of relative error is one percent or less for POPE's (f_P) and NAGAI's (f_N) formulae, and for the successive substitution method (n indicates the times of iteration) are illustrated below curves. The meshed part shows the area where it is impossible to calculate the approximation because $(1-f_N \cdot K) \leq 0$.

の値は X 軸, Y 軸の F , M を用いて (5) 式で計算し, $K=C_i/N_i$ は (9) 式を用いた。誤差の求め方は (6), (6) 式を用いた。 $M \leq 0.5$, $F \leq 1.5$ または $M \leq 0.3$, $F \leq 2.0$ なら逐次代入法の 1 回の実行のみで, f の推定値の誤差が 1 パーセント以下となる。右上の網目模様部分は $(1-f_N \cdot K) \leq 0$ となり, この解き方では計算が不能となる範囲である。

なお Fig. 4 で, $n=3$ の曲線の一部に見られる凸凹はプロッターで曲線を描かせるためのプログラム中の計算精度に起因している。

論 議

資源の減少が BARANOV (1918) のモデルに忠実であれば関数 $f(F, M)$ の値を正確に求める必要があるが, 実際の漁業は必ずしも BARANOV のモデルが一番よく合うわけではない。POPE (1972) の近似式 $f_P = \exp(M/2)$ は漁獲が各期間の中央で瞬間的に行われるとするモデルの場合は近似式ではなく正確な表現となる。この点では, 永井の近似式は現実との対応がはっきりしない弱点を持つ。しかし BARANOV の漁獲方程式を反復計算法で解く場合には, 第 1 近似値として POPE 式よりも真の値に近い永井の近似式を利用の方が合理的である。

石岡・猪子 (1982) では本間 (1978b) のミニマムストック H_m がほぼ一定となる範囲についてははっきりさせていなかったが, 以上の結果から見て次のように言うことができよう。

すなわち関数 $f_i(F_i, M_i)$ を用いて初期資源量 N_0 を示すと次式となる。

$$N_0 = H_m + N_e \cdot \exp\left(\sum_{i=1}^n M_i\right) \quad (20)$$

$$H_m = \sum_{i=1}^n \{f_i \cdot C_i \cdot \exp\left(\sum_{j=0}^{i-1} M_j\right)\} \quad (21)$$

ここで $M_0=0$ とする。

N_i は最終尾数, n は期間数である。

(20) 式の f_i は F_i と M によって定まる値であるが, F_i が小さければ近似的に POPE 式, 永井式のように M のみによって定められる。また f_i はその時の初期資源尾数 N_i によって F_i とともに変化するが, N_i が充分大きければ前述のように f_i の変化割合は無視できる程小さく N_i の大きさに関わらず一定と考えてよい。また適当な N_0 を与えて前進法の計算を行い H_m を求めることができ, この H_m は N_0 によらずほぼ一定と考えてよい。コホート解析の計算は後退法による場合が多いが, H_m を用いることにより前進法の計算からも後退法と同じ結果を得ることが可能である。すなわち (20) 式で N_0 を与えれば N_e が求められ, N_e を与えれば N_0 が求められる。また最終生残率 N_e/N_0 を与えて N_0 , N_e を求める式は石岡・猪子 (1982) が示している。

(20) 式から見て, $\exp(M_T) = \exp\left(\sum_{i=1}^n M_i\right)$ が大きい時, N_0 の推定に与える N_e の影響は大きくなる。すなわち自然死亡係数が大きい場合, M_i や N_e をかなり正確に把握しなければ N_0 は正確には推定できない。しかし大きな値となる自然死亡係数を正確に把握することは特に困難な

問題であり、コホート解析の適用が難しい場合と言える。

コホート解析が適用しやすいのは自然死亡係数が小さく、漁獲死亡係数が大きい場合、すなわち加入したもののうち、寿命までに漁獲される割合が大きい資源の場合である。

なお M が一定で期間が各々異なる場合の計算方法としては TOMLINSON (1970) の報告があるが、それぞれの期間を一定と考え、その期間内の M が異なる場合として計算する方が簡単である。すなわち各期間の M をその期間内で累積して求め、それに対応する F を計算する。さらに求められた F を、それぞれ異なる期間で割ることにより、単位期間当りの F が求められる。

以上計算手法について検討してきたが、 f_F , f_N とともに現実的な状態では非常によい近似値である。 F が大きすぎる時は期間を細分化して各期間内の F の値を小さくすることにより、近似値で十分な精度を得ることができる。また F_i が適当な大きさの範囲内であればどちらの近似値を使っても真の値との差は数パーセント以内という場合が多い。実際の資源量推定においては自然死亡係数をはじめ、この誤差とは桁違いに悪い精度の推定値を用いなければならない。それらの影響の方が推定結果に大きく影響すると思われる。

要 約

- 1) コホート解析に用いられる BARANOV の漁獲方程式について、POPE (1972) の関数

$$f(F, M) = \frac{(F+M) \{1 - \exp(-F)\}}{F \cdot [1 - \exp\{- (F+M)\}]} \quad \text{の近似式を数学的に検討した。}$$

- 2) 永井 (1980) の近似式 $f_N = \frac{M}{1 - \exp(-M)}$ が POPE の近似式 $f_F = \exp(M/2)$ より真の関数値に近い。

- 3) BARANOV の漁獲方程式の解法を検討し、永井の近似式による値を第 1 近似値として用いる逐次代入法を示した。実質的には 4 回以下の繰り返し計算で十分な精度が得られる。

文 献

- BARANOV, F. I., 1918: On the question of the biological basis of fisheries, 笠原昊・深瀧弘共訳, 漁業科学叢書 1 号, 水産庁調査研究部, 48pp.
- GULLAND, J. A., 1965: Estimation of mortality rates, Annex to Rep. Arctic Fish. Working Group, Int. Counc. Explor. Sea. C. M. 3, 12pp.
- 畑中寛, 永井達樹, 若林 清, 1977: 資源量および漁獲死亡係数推定のための逐次計算 (Cohort analysis) 数値表, 遠洋水産研究所, 41pp.
- 本間 操, 1978 a: Cohort 解析のあてはめ, 漁業資源解析のための電子計算機プログラム集, 水産庁, FZRP/5, 175—191.
- 本間 操, 1978 b: 漁獲対象となった Minimum ストックの計算, 漁業資源解析のための電子計算機プログラム集, 水産庁, FZRP/5, 193—197.
- 石岡清英・猪子嘉生, 1982: Cohort の漁獲統計が得られる場合の初期資源量推定方法・江田島湾のガザミを例として, 南西水研報告, (4), 33—54.

- JONES, R., 1961: The assessment of the long term effects of changes in gear selectivity and fishing effort, *Mar. Res. Scot.*, (2), 19pp.
- JONES, R., 1964: Estimating population size from commercial statistics when fishing mortality varies with age, *Rapp. Cons. Explor. Mer.*, 155(38), 210-214.
- 加藤史彦, 1978: Virtual population analysis 及び cohort analysis による資源尾数と漁獲死亡係数の推定, 漁業資源解析のための電子計算機プログラム集, 水産庁, FZRP/5, 167-173.
- MURPHY, G.I., 1965: A solution of the catch equation, *J. Fish. Res. Bd. Canada*, 22, 191-202.
- 永井達樹, 1980: コーホルトアナリシス入門, 遠洋水研ニュース, (38), 10-12.
- PALOHEIMO, J.E., 1961: Studies on estimation of mortalities. I. Comparison of a method described by BEVERTON and HOLT and a new linear formula, *J. Fish. Res. Bd. Canada*, 18(5), 645-662.
- POPE, J.G., 1972: An investigation of the accuracy of virtual population analysis using cohort analysis, *Int. Comm. Northwest Atl. Fish. Res. Bull.*, (9), 65-74.
- SIMS, S.E., 1982: Algorithms for solving the catch equation forward and backward in time, *Can. J. Fish. Aquat. Sci.*, 39 (1), 197-202.
- 田中昌一, 1960: 水産生物の population dynamics と漁業資源管理, 東海水研報(28), 1-200.
- TANAKA, S., 1975: Some consideration on the methods for calculating survival rate from catch per unit effort data, *Bull. Japan. Soc. Sci. Fish.*, 41 (2), 121-128.
- 戸川隼人・1972: 数値計算技法, オーム社, 東京, 280pp.
- TOMLINSON, P.K., 1970: A generalization of the MURPHY catch equation, *J. Fish. Res. Bd. Canada*, 27 (4), 821-825.
- TOMLINSON, P.K., 1971: MURPHY-fishing mortality estimation, in "Computer program for stock assessment.", comp. N.J. ABRAMSON, *FAO Fish. Tech. Pap.* 101, p. 51-57, 若林清訳, 漁業資源解析のための電子計算機プログラム集, 水産庁, FZRP/5, 149-166.