

体長制限の効果について II

(推定値の精度と近似度)

山 中 一 郎

On the effect of size restrictions II

(The precision and approximation of estimates)

Ichiro YAMANAKA

The assumptions in the previous report were checked.

The precision of the estimate was discussed by the theory of error, the result shows the best value when the natural mortality m and the decreasing rate k ; and that between m and the annual growth g are positively correlated, and while, that between k and g are done negatively, which are rather impractical.

In the case shown as example, the standard error of the estimate in the stable yield stands in about 20-30%.

The approximation of the exponential curve of size composition in comparing with compound normal curve was discussed.

§ 1. は し が き

著者は前報において、最も理想的かつ簡単な指数型体長分布をもつ魚群体について、漁獲物の最小体長を制限した場合の漁獲物の体長分布が、自然死亡、漁獲死亡、年生長等の統計量をパラメーターとしてもつ指数函数の組合せで示されることを説き、実例を示した。しかしながら、この取扱い方は、当時のべたように、きわめて理想的な場合についての第一近似解であり、これには生物学的、および数学的に検討されなくてはならない多くの前提を含んでいた。

これを現実の漁業にあてはめる場合に考えなくてはならない補正については、前報においてもすでに若干の考察を加えたのであるが、本報では、さらに、これについて吟味を逐次おこなつて行くことにする。

§ 2. 推定量の分散

前報では、全く決定論的な取扱いのみをおこない。取扱われた統計量は誤差をふくまず、現象は平均過程としておこる場合についてのみ論ぜられていたので、まずこの点を吟味して修正をおこなうことにする。

前報でのべたように、体長制限後 i 年の漁獲物曲線は、体長減衰係数 k 、漁獲による減衰係数 f 、年生長 g 、制限により新たに生長を許される年数 r 、とそのときの体長 l_i 等を用いて次の形で示される。

$$\left. \begin{aligned}
W_i &= \exp.(fl_{i+r})[\Omega(k+f, l_r) - \Omega(k+f, l_{r+i}) + \Omega(k, l_{r+i})] \\
&\quad \text{但し } i \leq r \\
&= \exp.(rgf)[\Omega(k, l_r) - \Omega(k, l_i)] + \exp.(fl_{i+r}) \\
&\quad [\Omega(k+f, l_r) - \Omega(k+f, l_{i+r}) + \Omega(k, l_{i+r})] \\
&\quad \text{但し } i > r
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{ここで } \Omega(k, l_r) = \int_l^\infty le^{g-k'l} dl \dots\dots\dots(2)$$

ここで k, g, lr , 等は、実際には $V(k), V(f)$ 等の分散を有する推定値である。この場合 W_i の推定値 \hat{W}_i の分散 $V(\hat{W}_i)$ は

$$V(\hat{W}_i) = \sum_{k,f} \sigma_{k,f}^2 \left(\frac{\partial W}{\partial K} \right)^2 \dots\dots + 2 \sum_{k,l} \sigma_k \sigma_f \frac{\partial W}{\partial K} \frac{\partial W}{\partial f} \rho_{kf} \dots\dots\dots(3)$$

となりおのおのの推定量の分散および共分散と W の各統計量に関する偏微分の形等でさだまる。

しかし実際にはこの様な運算をおこなうことは、数学的には困難でないにしても、これには計算労作が甚だ複雑となるので実用的には値打がすくない、ここでは制限による安定漁獲高と、制限直後の漁獲高との比 $\frac{W_\infty}{W_0}$ についてのみ考えとする、前の式から

$$P = \frac{W_\infty}{W_0} = e^{rfg} \dots\dots\dots(4)$$

このうち f は実際に測定するのではなく、 k を実際の測定により求め m を適当において $f = k - m$ によつて求めるのである。また r は制限後の年数であるからこれは 確定変数であるから、ここで確率変数としてとりあつかい得るのは k, g, m の3つである。

$$P = e^{rfg} = e^{r(g \cdot k - m)} \dots\dots\dots(5)$$

に上の関係を代入すると

$$\frac{\sigma^2 P}{P^2} = r^2 f^2 g^2 \left[\left(\frac{\sigma_k^2 + \sigma_m^2 - 2\sigma_k \sigma_m \rho_{km}}{f^2} \right) + 2 \left(\frac{\sigma_k \sigma_g \rho_{kg} - 2\sigma_m \sigma_g \rho_{mg}}{fg} + \frac{\sigma_g^2}{g^2} \right) \right] \dots\dots\dots(6)$$

となる。

これによると P の推定値の分散は

- i r, f, g の値とともに増大する。
- ii k, n, g の誤差のうち、どれが特に大きくひびくかということはない。
- iii k, n, g の相互関係についていえば
 k, m は正相関
 m, g は正相関
 k, g は逆相関

のときに推定値分散は小になる。

しかしながら、このような場合は実際に起りそうもないことである。減衰の大部分が自然死亡によるのでない限り、 k と m とが必ずしも正相関をするとはいえ得ない。むしろ自然死亡率は、魚群密度が極端に小さくないかぎり、魚群密度の小な場合は自然死亡をも減ずるのではないかと考えられるので、この場合、減少係数 k と m と逆相関であると考えた方が妥当であろう。一方、減少等が大で魚群密度が小になつている方が生長はよいと考えられるのでであろうから、 g は k とそれぞれ正相関をすのでであろう。そのため実際の魚群体では、この3つの相関係数のうち2つまでが推定値の分散を大きくするように作用している。したがつて P の推定精度は k, n, f 等が独立としたときよりむしろ低下することはやむを得ない。

前報で用いたソーハチガレイの実例を用い、

$$k=0.35 \quad g=4.0 \quad f=0.32 \quad l_0=8\text{cm} \quad r=1 \dots\dots\dots(7)$$

としておのおのの推定値の標準誤差を10%とすれば k, g, n 等が独立な場合には (7) より

$$\frac{\sigma^2 P}{P} = 0.075 \quad \frac{\sigma P}{P} = 0.23 \dots\dots\dots(8)$$

すなわち23%の標準誤差となる。

最悪の場合を考えると

$$\rho(k, m) = -1$$

$$\rho(m, g) = -1$$

$$\rho(k, g) = 1$$

のときには

$$\frac{\sigma^2 P}{P} = 0.128 \quad \frac{\sigma P}{P} = 0.36 \dots\dots\dots(9)$$

すなわち誤差は36%となる。

実際の場合はこの中間の値をとるわけである。

§ 3. 体長組成の形についての吟味

前報では、体長組成が完全な指数分布であるとしたが、この制限を若干ゆるめて各年令の体長組成が正規型で、これが複合されている場合に考えをおしひろめた。

この場合体長分布は

$$\varphi(l) = \sum_{n=0}^{\infty} N(l_0 + ng, \sigma^2) \rho^n \dots\dots\dots(10)$$

という型になる、ここで N は正規函数を示し、 ρ は生残率である。

この型は l_0 を漁獲に入る最若年魚の平均体長であり imaginary な部分を若干ふくんでいることは明らかである。

l_0 を原点にとれば

$$\varphi(l) = \sum N(ng, \sigma_n) \rho^n \dots\dots\dots(11)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ここで natural mortality} \quad v = e^{-ng} \\ \text{fishing mortality} \quad \phi = e^{-fg} \\ \rho = e^{-(k+f)g} \end{array} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

とおきかえておのおの正規分布の mode のみをとつて見れば、前報と全く同じ形となる。すなわち前報の各々の指数函数の形を

$$\left. \begin{array}{l} e^{-kl} \rightarrow \sum_n N(ng, \sigma_n) \rho^n \\ e^{-nl} \rightarrow \sum_n N(ng, \sigma_n) v^n \\ e^{-fl} \rightarrow \sum_n N(ng, \sigma_n) \phi^n \end{array} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

とそれぞれおきかえたものに相当する。

このとき

$$\Psi(l, k) = \int_l^{\infty} e^{-kl} \text{に相当するものは}$$

$$\Psi(l, \rho) = \int_l^{\infty} \sum_n N(ng, \sigma_n) \rho^n dl \dots\dots\dots(14)$$

となる、これは

$$\left. \begin{array}{l} \frac{l-ng}{\sigma_n} = t_n \\ I(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \end{array} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

とおけば

$$\varphi(l, \rho) = \sum_n I(t_n) \rho^n \dots\dots\dots (16)$$

という形で示すことが出来る。

$I(t)$ はいかなる書物の統計数値表にも出ている函数であり、この値は ρ の小さい場合には収斂は速である。

また $\Omega(k, l)$ に代る函数としては

$$\Omega(l, \rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_l^\infty \sum (l+l_0)^3 e^{-\frac{(l-l_0)^2}{2\sigma_n^2}} \rho^n dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n \rho^n \int_l^\infty (l+l_0)^3 e^{-\frac{(l-l_0)^2}{2\sigma_n^2}} dx \dots\dots\dots (17)$$

$$t_n = \frac{l+l_0-ng}{\sigma_n} \quad \text{とおけば}$$

(ここで l は l_0 を原点とする l_0 はの0才平均体長)

$$\Omega(l, \rho) = \sum_n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n}} \rho^n e^{-\frac{l^2}{2\sigma_n^2}} \left[\sigma_n^3 (t_n-1)^2 + 3\sigma_n^2 ng (t_n-1) + 3\sigma_n n^2 g^2 + \rho^n n^3 g I_n(t) \right] \dots\dots\dots (18)$$

という形になる。

この値は解析的に求めることが出来るが実際にはむしろ数値積分で求める方がよいであろう。

しかしいずれにせよこのような函数を求めて数値的にとくことにかかなりの労力を要することであるので、今はこれをさげ、 Ω, ψ 等の函数が、指数函数の組合せと、正規分布の組合せによるものとの

近似の程度を見るという立場からこれを検討することにする。

σ がもし一定であるとすればこの小さいうちは体長の小さい部分ではよく合致するが大きい所で、またこの値が大きいと体長の大きい所で、はずれて来る。

前報でのべたソーハチガレイの例で $k=0.4$, $g=4.0$ ($\rho=0.20$) として σ の値を色々かえて見ると $\sigma=1.7$ 附近でよく一致することがわかる。

実際の魚群体では σ が年令と共に増大すると見る方が正しいであろうから、実際の体長分布が指数型に近いことが説明される。指数型分布としての取扱いはかなりよく実際に近似していることがわかる。

体長組成に鞍部を生ずることなく、単調な指数分布に近似する形となる場合の条件は田中²⁾(54) によつても解かれているが、次のようにして求めることが出来る。

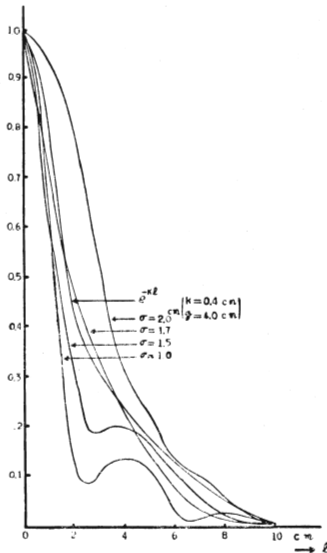


Fig 1. Comparison of an exponential curve against the compound normal curves

$$\sum_i N(ig, \sigma); e^{-kl}$$

一般に2つの正規分布の複合したものは

$$f(x) = e^{-\frac{t^2}{2}} + \frac{A}{2} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-y}{2}\right)^2}$$

という形になる。

ここで第一項は x を変量とする平均値0、標準偏差1という標準型の正規分布であり第2項のうちの y は年生長を、 z は第2の正規分布の標準偏差を夫々第1項の標準偏差を単位として示したもの、 A は組成比にそれぞれ相当する。

これが鞍部を持つときは

$$f'(x) = 0 \quad \text{が 3 つの実根を有する。}$$

すなわち

$$f'(t) = xe^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{A}{z^2}(x-y)e^{-\frac{(x-y)^2}{2z^2}}$$

この第1項, 第2項をそれぞれ $g_1(x), g_2(x)$ とおくと $g_1(x), -g_2(x)$ を別々のグラフで示すとき $g_1(x)$ は $x=0$ に $-g_2(x)$ は $x=y-z$ において max. となるはずである。

$f'(t)=0$ が 3 つの実根をもつときにはこれから

$$g_1(y-z) < g_2(y-z)$$

これより

$$(y-z)e^{-\frac{(z-y)^2}{2}} < \frac{A}{z} e^{-\frac{1}{2}}$$

となる。

これは数学的には完全な条件ではないが実際に起り得る $A < 1, z > 1$ という場合にかぎって図3に A, y, z の関係を示すこの曲線の右側

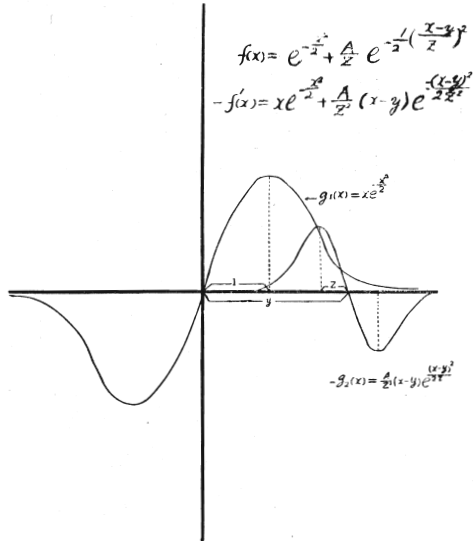


Fig 2. Graphical illustration of the condition making a bimodal curve.

の部分では鞍部があることになる。

前報のリーハチガレイでは $Y \approx 3, \rho \approx 0.2, Z \approx 1.1 \sim 1.2$ であるから鞍部は生ぜず指数分布に近い体長分布に近い体長分布となることが説明される。

以上のように, 先報にのべた实例は, 理論的に見た近似性は高いと思われ推定値に分散のあることを考慮に入れば実用に供し得ると思われる。

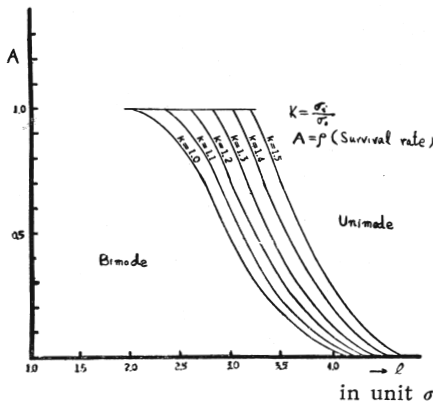


Fig 3. Domains of K, A and ρ making unimodal and bimodal curves.

§ 3. あとがき

密度変化による生長度の変化等に対する補正を考える必要があるが, これは数学的に取扱うことは今は困難であるから, これは田中³ ('54) の行つたように初期の生長度 g と安定後の生長度 g' を夫々パラメーターとする Wi の曲線をつくり, この $i=0$ では前者上にあり $i=\infty$ で後者に接する曲線を引くことによつて近似的に求めることが出来る。この影響は制限の効果をゆるめるように作用する。

自然死亡率が年令と共に増大する場合の修正は今後にゆずりたいと思う。

参 考

- 山 中 一 郎：体長制限の効果について，日水研研究年報 No. 1 ('54) P. 119.
田 中 昌 一：体長組成にあらわれるモードの意義について I，日水誌，Vol. 20, No. 8 ('54) P. 681.
———：漁獲努力量制限の効果について，日水研，Vol. 20, No. 7 ('54) P. 599.