

GPSを用いた海上での延縄浮子間の距離の推定

岡村 寛*・水野恵介*・岡崎 誠*

Estimation of the Distance between the Floats of Longline on the Sea Using the GPS

Hiroshi OKAMURA*, Keisuke MIZUNO* and Makoto OKAZAKI*

It is very important to estimate the distance between floats of tuna longline accurately for estimating its underwater shape. This study examined the available estimator of the distance and necessary sample size in order to obtain the accurate estimate of the distance by using the statistical theory, the computer simulation and in-situ experiments using the civil-use GPS receivers. The statistical theory and the simulation using a pair of the random and independent dataset indicated that it was desirable to use the maximum likelihood estimator and take more than 100 samples. From the experiment with a pair of GPS, the estimates of each position were positively correlated and the correlation coefficient was more than 0.9. This result and the characteristics of the GPS imply that the estimates of the distance obtained by the actual observations could be more accurate than that obtained by the theory and the simulation. Therefore, by taking these results into account with a disadvantage on the sea, errors less than 1 percent of the estimates of the distance between floats of tuna longline could be attained by using about 200 samples of the estimates of two positions by the civil-use GPS.

Key words : distance between 2 points, measurement error, GPS, longline

はじめに

延縄漁具の水中形状を左右する幹縄のたるみ具合を調べるために浮子間の距離を正確に測定する必要がある(水野ら, 1997)。今日, 様々な分野でGPS (Global Positioning System) が位置測定に利用されており, 正確な位置のわかった基準点を参照して観測点の位置を得るDGPS (Differential GPS) では, より高精度(誤差 数cm~数m)の測定が可能である。しかし, 海上に浮かべた浮子間の距離の測定を外洋で行う場合にはそのような基準点が利用できず有効ではない。また現在のところ高精度で測定位置が得られるGPSは高価であり海上での使用には亡失する危険がつきまとうため搭載するGPSは出来る限り安価なものが望まれる。それ故, 本研究では市販の安価なGPSを用いた。現在カーナビゲーション等に用いられる市販のGPS受信機の位置測定精度は, 単独測位ではおおよそ100m (95%信頼限界の誤差半径; 標準偏差の約2倍)といわれる(土屋・辻, 1995)。一方, 延縄の水中形状の推定には浮子間の距離(およそ500m)を誤差数m以下で測定することが望まれる(水野ら, 1997)。

本論文では市販のGPSを用いて延縄浮子間の距離を計算したとき, その誤差を真の値の1%以下に抑えることを目標とした。そこで, 最初に位置測定誤差を持つ2点間の距離の推定についてランダムな誤差を仮定

した上で, 従来の統計理論やシミュレーションを用いて適切な推定量に関する理論的な考察をおこなう。その結果から正確な2点間の距離を測定するために必要な標本数を求める。さらに, 遠洋水産研究所の屋上に1対の市販のGPSを設置し距離を推定する実験を行う。これらの結果とGPSの性質を組み合わせることにより, 海洋において市販のGPSを用いて延縄浮子間の距離を推定するのに妥当な推定量, 標本数を検討する。

1次元空間の距離の推定量

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1)$$



図1. 2点間の距離の1次元モデル

GPSによってある点の位置を測定すると, その点の緯度と経度の値が得られる。2点間の距離 z は2次元空間(平面)上でまず緯度方向・経度方向それぞれの距離 x, y を計算し, 次の式によって求める。

そこで, 緯度・経度方向の距離を推定するため, 1次元モデル(図1)を考える。位置 a, b での観測値を y_a, y_b とするととき測定毎に変化する2点間の距離は関

数で示すと、

$$f(a,b) = \sqrt{(y_b - y_a)^2} \quad (2)$$

となる。いま、ある測定器による両端点a, b (b>a)の測定誤差はそれぞれ平均0, 分散 2の正規分布N(0, 2)に従うと仮定する。この場合、測定器による観測値は1つではないので種々の推定量が存在する。ここでは、次の4つの推定量を検討した。

$$d = (1/n) \sum_{i=1}^n \text{sign}(y_{bi} - y_{ai}) \times \sqrt{(y_{bi} - y_{ai})^2} \quad (3)$$

$$\bar{d} = (1/n) \sum_{i=1}^n \sqrt{(y_{bi} - y_{ai})^2} \quad (4)$$

$$\hat{d} = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_{bi} - y_{ai}) \right\} \quad (5)$$

$$\bar{d} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_{bi} - y_{ai})^2} \quad (6)$$

ここで、 y_{ai} (i=1,...,n) はa点の位置のi番目の観測値、 y_{bi} (i=1,...,n) はb点の位置のi番目の観測値である。推定量 \bar{d} は推定量<d>の各観測値の距離が真の距離と同方向を向いているか否かを考慮して符号をつけたものであり、推定量<d>は単純に各観測値ごとに距離を計算して平均をとったもの、推定量 \hat{d} は各点の平均値の距離を計算したもの、推定量 \bar{d} は各点の距離の二乗を平均して平方根をとったものである。尚、以下の計算では、簡単のためにa=0, b=xとする。

1) 不偏推定量 \bar{d} 及び推定量 d

\bar{d} が不偏推定量になっていることが、補遺1により証明される。分散は、補遺5の計算により、 $2/n$ となる。

<d>は大きな偏りを持つ(補遺2)。この偏りg(x)はxに依存する。 $x=1$ のときのg(x)のグラフを図2に示した。また、 $x=1$ のときのg(x)/xの値を表1に示した。これより、符号なし距離を用いた距離推定量でも、真の距離xが測定誤差の4倍以上あれば、偏りは非常に小さくなる事が分かる。

a点の観測値がb点の観測値より必ず小さければ(真の距離xがxに対して十分大きければ)<d>でも問題がない。しかし、xがxに比してそれほど小さくなく、よって逆にa点の観測値がb点の観測値より大きくなるときは、<d>を用いると大きな偏りが生じる。これは後者の状況では距離を測る方向が逆になり、マイナスの距離を不当に足し込んでしまうためである。

図1. $x=1$ としてxの値を変化させたときのg(x)/x

x	0.01	0.1	1	2	3	4	5	10
g(x)/x	111.842	10.312	0.399	0.050	0.006	0.001	0.000	0.000

(小数点以下4桁は四捨五入)

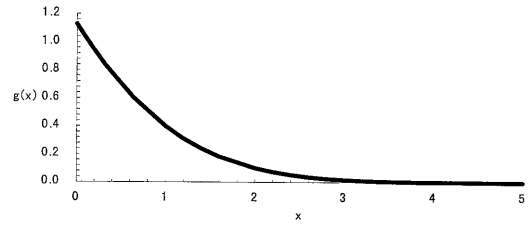


図2. $x=1$ のときのg(x)のグラフ

表2. $x=1$ のときのh(x,n)/x

n \ x	0.01	0.1	1	2	3	4	5	10
1	111.842	10.312	0.399	0.050	0.006	0.001	0.000	0.000
2	78.794	7.019	0.167	0.009	0.000	0.000	0.000	0.000
5	49.470	4.109	0.031	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
10	34.692	2.657	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
20	24.244	1.648	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
100	10.312	0.399	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1000	2.657	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

(小数点以下4桁は四捨五入)

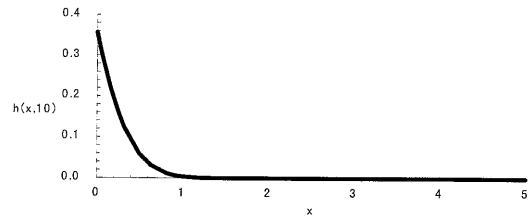


図3-1. $x=1$ のときのh(x,10)のグラフ

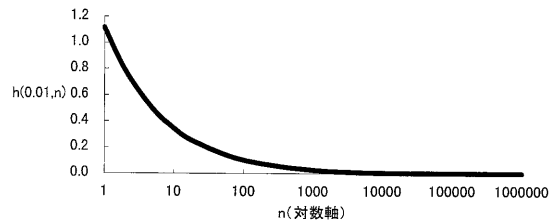


図3-2. $x=1$ のときのh(0.01,n)のグラフ

2) 最尤推定量 \hat{d}

定理『の最尤推定量 \hat{d} をf()に代入して得られるf()は、一般にやはりf()の最尤推定量である(つまり、f()=f())』(竹内, 1963)により、最尤推定量 $\hat{d} = (1/n) \sum y_{bi}$, $\bar{d} = (1/n) \sum y_{ai}$ を $d=f(a,b) = \sqrt{(a-b)^2}$ に代入して得られる \hat{d} は最尤推定量である。ただし、この推定量は不偏推定量ではない(補遺3)。この偏りh(x,n)は、<d>の推定量とは異なり、nにも依存する。h(x,n)のグラフを図3-1, 図3-2に、h(x,n)/xの値の変化を表2に示した。これより、両点のサンプル数が20個以上あれば、真の距離xがxと同じくらいであってもほとんど偏りがなくなる。

3) 偏りの大きな推定量d

\bar{d} を用いた場合、この推定量の偏りは補遺4で導出される式によって計算される。この偏りをk(x,n)として、そのグラフを図4-1, 図4-2に、k(x,n)/xの値の変化を表

GPSに用いた海上での延縄浮子間の距離推定

3に示した．この表を見ると，推定量はxが大きくなる時に偏りが小さくなるという点では他の推定量と同じであるが，観測数nの増加とともに偏りが大きくなるという一見常識に反する性質を持っていることが分かる．

4) 各推定量の比較と1次元の距離推定量のまとめ

～ 式の推定量の分散は公式

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \quad (7)$$

を用いて計算される(詳細は補遺5)．ここでは，各推定量の良さを平均二乗誤差(MSE)によって評価する．

表3. = 1のときのk(x,n)/x

n \ x	0.01	0.1	1	2	3	4	5	10
1	111.842	10.312	0.399	0.050	0.006	0.001	0.000	0.000
2	124.335	11.565	0.549	0.136	0.058	0.032	0.020	0.005
5	133.570	12.490	0.656	0.190	0.087	0.049	0.032	0.008
10	136.939	12.828	0.694	0.208	0.096	0.055	0.036	0.009
20	138.669	13.001	0.713	0.216	0.101	0.058	0.037	0.010
100	140.072	13.142	0.728	0.223	0.105	0.060	0.039	0.010
1000	140.390	13.174	0.732	0.225	0.105	0.061	0.039	0.010

(小数点以下4桁は四捨五入)

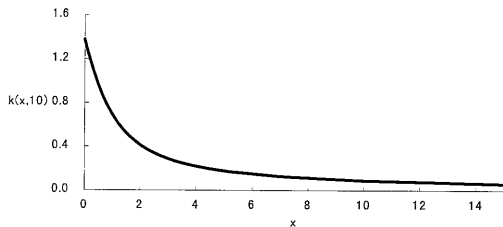


図4-1. = 1のときのk(x,10)のグラフ

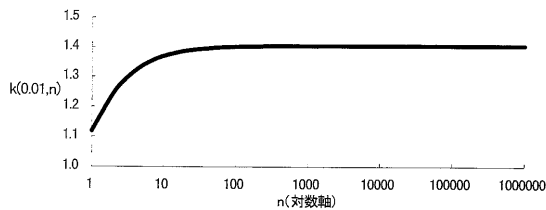


図4-2. = 1のときのh(0.01,n)のグラフ

MSEは，

$$MSE = (\text{偏り})^2 + \text{分散} \quad (8)$$

で計算される．従って，各推定量のMSEは，次の式で与えられる．

$$MSE(d) = 2^{-2}/n \quad (9)$$

$$MSE(\hat{d}) = \{(n-1)g(x)^2 - 2xg(x) + 2^{-2}\}/n \quad (10)$$

$$MSE(\hat{\delta}) = (2/n)^2 - 2xh(x,n) \quad (11)$$

$$MSE(\bar{d}) = 2^{-2} - 2xk(x,n) \quad (12)$$

図5に = 1として，xを0.1，1，3と変化させた場合のMSEの変化を示した．

この図よりMSEを推定量の良さの基準として採用すれば， \bar{d} ， $\hat{\delta}$ の推定量を用いるのが最も良いと考えられる． \bar{d} を用いたとき，95%信頼区間の幅を真の距離の100c%に抑えるために必要な標本数nは，偏りが0よりMSE = 分散であることから，(9)式の平方根を用い

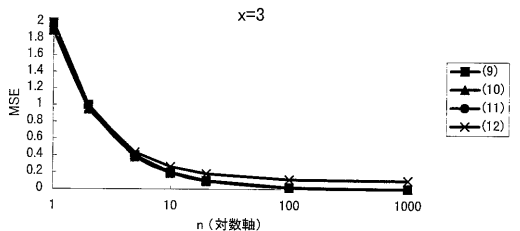
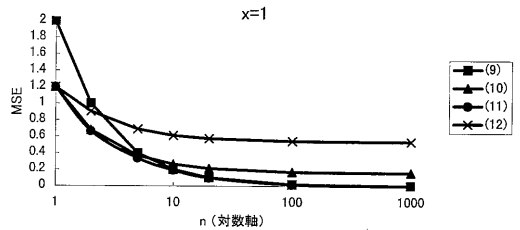
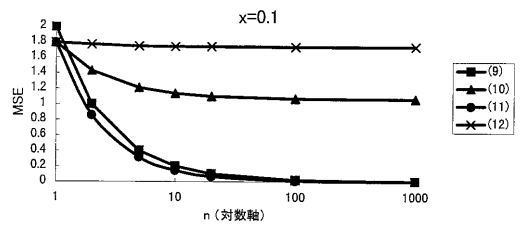


図5. = 1のときのMSEの変化((9)~(12)は本文中の式(9)~(12)に対応)

て計算出来る．(9)式から，

$$2\sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \frac{1}{x} = c \quad (13)$$

とおく．この式を解くと，必要標本数nは，

$$n = \frac{8}{c^2} (x)^2 \quad (14)$$

で与えられる．測定器の精度が良くx/ = 20であるとき，c=0.01とすると，8/(0.01)² × (1/20)² = 200となり，200個のサンプルがあれば95%信頼区間で考えて距離の誤差を1%に抑えられる．x/ = 1という測定器の精度が悪い場合は，誤差1%を達成しようとするれば，8/(0.01)² × (1/1)² = 80000となり，非常に多くのサンプルが必要となる．延縄の浮子間の距離推定はほぼx/ = 20に対応するので，200~300個のサンプルを用いれば十分な精度が得られる．表2より標本数が100個に近づくると， $\hat{\delta}$ の偏りは0となるので， $\hat{\delta}$ についても必要な標本数は同じになる．

以上から1次元の距離の場合は以下の2点が分かった．

- ・ 距離推定量は不偏推定量 \bar{d} あるいは最尤推定量 $\hat{\delta}$ を採用するのが良い．
- ・ 延縄浮子間の距離でのように真の距離に比して測定

器の精度が良いとき ($x/\sigma = 20$) は、標本数が200個以上あれば、精度の良い推定が可能である。

2次元空間の距離の推定量

2次元の距離 z は、2点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ が与えられれば、

$$z = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (15)$$

によって計算される。前節の考察により、2次元の距離の各成分を1次元の距離推定量 \bar{d} または \hat{d} によって計算し、(15)式によって距離を求めることとする。

1) \bar{d} の推定量を成分に用いた2次元距離

\bar{d} の推定量の z の中の式

$$\text{sign}(y_{bi} - y_{ai}) \sqrt{(y_{bi} - y_{ai})^2} \quad (16)$$

の値は $y_{bi} - y_{ai}$ と一致するから、真の距離を x とすると

$$Z = \text{sign}(Y_{bi} - Y_{ai}) \sqrt{(Y_{bi} - Y_{ai})^2} \sim N(x, 2^{-2}) \quad (17)$$

となる (大文字は確率変数を表している。以下も同じ)。よって、

$$D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{sign}(Y_{bi} - Y_{ai}) \sqrt{(Y_{bi} - Y_{ai})^2} \sim N(x, 2^{-2}/n) \quad (18)$$

である。x成分の距離 (真の距離 x) を推定するために推定量 \bar{d} を用いたものを \bar{m}_x , y成分の距離 (真の距離 y) を推定するために推定量を用いたものを \bar{m}_y とする。補遺6より、

$$\varphi(\bar{m}_x, \bar{m}_y) = \sqrt{\bar{m}_x^2 + \bar{m}_y^2} \quad (19)$$

とおけば、

$$E[\sqrt{\bar{m}_x^2 + \bar{m}_y^2}] = \varphi_0 + \frac{1}{n} \varphi_{m_x m_x} + \frac{1}{n} \varphi_{m_y m_y} + \dots \quad (20)$$

となる。ここで、 $\varphi_0 = \varphi(x, y)$ であり、 $\varphi_{m_x m_x}$ などは、

$\varphi_{m_x m_x}(\bar{m}_x, \bar{m}_y) / \bar{m}_x^2$ などに、 $\bar{m}_x = x, \bar{m}_y = y$ を代入したものを表す。式(20)より、(19)の形の推定量は、偏り

$$\frac{1}{n} \varphi_{m_x m_x} + \frac{1}{n} \varphi_{m_y m_y} + \dots \quad (21)$$

をもつことが分かる。上の(20)式の第3項までの式を整理すると、以下ようになる。

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{n} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dots \quad (22)$$

\hat{d}^2 を \bar{d}^2 の不偏推定量とし、推定量(19)を

$$\sqrt{\bar{m}_x^2 + \bar{m}_y^2} - \frac{\hat{d}^2}{n \sqrt{\bar{m}_x^2 + \bar{m}_y^2}} = \frac{n(\bar{m}_x^2 + \bar{m}_y^2) - \hat{d}^2}{n \sqrt{\bar{m}_x^2 + \bar{m}_y^2}} \quad (23)$$

とすれば、これは単に各成分を \bar{d} で推定して(19)式で計算するものより不偏推定量に近いと考えられる。

2) \hat{d} の推定量を成分に用いた2次元距離

各成分を \hat{d} の式で推定した距離は、1次元空間の場合と同じく2次元空間の距離においても最尤推定量である。1)と同様、x成分の距離 (真の距離 x) 推定量として \hat{d} に従うものを m_x , y成分の距離 (真の距離 y) 推定量として \hat{d} に従うものを m_y とする。補遺7より、

$$\varphi(m_x, m_y) = \sqrt{m_x^2 + m_y^2} \quad (24)$$

とおくとき、

$$E[\sqrt{m_x^2 + m_y^2}] = \varphi_0 + \frac{1}{n} \varphi_{m_x m_x} + \frac{1}{n} \varphi_{m_y m_y} + \dots \quad (25)$$

となる。ここで、 $\varphi_0 = \varphi(x, y)$ であり、 $\varphi_{m_x m_x}$ などは、

$\varphi_{m_x m_x}(\hat{m}_x, \hat{m}_y) / \hat{m}_x^2$ などに、 $\hat{m}_x = x, \hat{m}_y = y$ を代入したものを表す。これは、式(20)と同じであるから、(21)式と同じかたちの偏りを持つことになる。それ故、 \hat{d}^2 を \bar{d}^2 の不偏推定量とすると、推定量

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2} - \frac{\hat{d}^2}{n \sqrt{m_x^2 + m_y^2}} = \frac{n(m_x^2 + m_y^2) - \hat{d}^2}{n \sqrt{m_x^2 + m_y^2}} \quad (26)$$

は各成分を \hat{d} で推定して(24)式で計算する距離の最尤推定量に対してその偏りを補正したものとなっている。

3) 2つの形の距離推定量の比較と2次元距離推定量のまとめ

補遺6, 補遺7で、期待値の計算式はいずれもとなっている。このことは各成分を \bar{d}, \hat{d} のどちらで

$$\begin{aligned} E[\sqrt{m_x^2 + m_y^2}] &= E[\varphi(m_x, m_y)] \\ &= \frac{1}{4\pi\sigma^2/n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(m_x, m_y) e^{-[(m_x-x)^2 + (m_y-y)^2]/(4\sigma^2/n)} dm_x dm_y \\ &= \varphi_0 + \frac{\sigma^2}{n} \varphi_{m_x m_x} + \frac{\sigma^2}{n} \varphi_{m_y m_y} + \dots \end{aligned} \quad (27)$$

推定しても、その分布は等しく結果 (期待値や分散) は変わらないということの意味する。ここでは、MSE が安定して小さく (図5)、比較的かたちが簡単である \hat{d} を採用し、次の2つの推定量、

$$a) \quad \hat{f} = \sqrt{m_x^2 + m_y^2} \quad (28)$$

$$b) \quad \hat{f} - \frac{\hat{d}^2}{n \hat{f}} = \frac{n(m_x^2 + m_y^2) - \hat{d}^2}{n \sqrt{m_x^2 + m_y^2}} \quad (29)$$

を考え、シミュレーションを用いて推定量 (a) と (b) の期待値、分散とMSEを比較した (シミュレーションの詳細は補遺8)。表4に各推定量の {偏り/(真の距離)}, 分散とMSEを示した。また、図6に、 $x=0.1, 1, 3$ のときの n に対するMSEを示した。

表4より、推定量 (b) を用いれば、偏りはかなり補正されることが分かる。しかし、推定量 (b) は分散が大きいため、MSEは推定量 (a) とほぼ一致し、必ずしも推定量 (a) が悪いとはいえない。MSEの小さ

GPSに用いた海上での延縄浮子間の距離推定

表4. 推定量a)とb)の偏り,分散,MSE (小数点以下4桁は四捨五入)

推定量 a) r

偏り/(真の距離)		0.01	0.1	1	2	3	4	5	10
n \ r	r								
2	2	124.298	11.702	0.508	0.111	0.041	0.024	0.026	0.006
5	5	79.514	6.891	0.195	0.074	0.015	0.005	0.007	-0.001
10	10	55.414	4.698	0.143	0.023	0.011	0.006	0.006	0.002
20	20	39.841	2.961	0.046	0.019	0.005	0.004	-0.001	0.001
30	30	31.341	2.390	0.037	0.008	0.004	0.005	0.000	0.002
50	50	22.937	1.651	0.011	0.001	0.001	0.001	0.002	0.001
100	100	16.298	0.984	0.008	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000
200	200	11.701	0.601	0.008	0.000	0.000	-0.001	0.000	0.000
1000	1000	4.472	0.124	-0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000

分散

分散		0.01	0.1	1	2	3	4	5	10
n \ r	r								
2	2	0.480	0.426	0.614	0.790	0.933	0.929	1.029	0.948
5	5	0.178	0.180	0.296	0.374	0.391	0.377	0.376	0.384
10	10	0.080	0.089	0.166	0.191	0.194	0.198	0.187	0.193
20	20	0.045	0.047	0.100	0.099	0.098	0.096	0.092	0.100
30	30	0.027	0.030	0.066	0.059	0.063	0.066	0.066	0.064
50	50	0.017	0.017	0.040	0.039	0.041	0.038	0.040	0.039
100	100	0.009	0.011	0.020	0.020	0.019	0.019	0.020	0.020
200	200	0.004	0.006	0.010	0.010	0.010	0.011	0.010	0.010
1000	1000	0.001	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002

MSE

MSE		0.01	0.1	1	2	3	4	5	10
n \ r	r								
2	2	2.025	1.795	0.872	0.839	0.947	0.938	1.046	0.951
5	5	0.810	0.655	0.334	0.396	0.393	0.377	0.378	0.384
10	10	0.387	0.310	0.187	0.193	0.195	0.199	0.188	0.194
20	20	0.203	0.134	0.102	0.100	0.099	0.096	0.092	0.100
30	30	0.125	0.087	0.067	0.060	0.063	0.066	0.066	0.064
50	50	0.069	0.044	0.040	0.039	0.041	0.038	0.041	0.039
100	100	0.036	0.021	0.020	0.020	0.019	0.019	0.020	0.020
200	200	0.018	0.010	0.010	0.010	0.010	0.011	0.010	0.010
1000	1000	0.003	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002

推定量 b) r-s/(nr)

偏り/(真の距離)

偏り/(真の距離)		0.01	0.1	1	2	3	4	5	10
n \ r	r								
2	2	60.135	5.499	0.066	-0.021	0.010	0.001	-0.004	0.001
5	5	37.354	3.491	-0.027	-0.001	-0.001	0.002	0.003	0.001
10	10	28.652	2.027	-0.011	0.003	0.008	0.001	0.001	0.001
20	20	17.904	1.144	0.006	0.007	0.009	0.000	-0.003	0.001
30	30	16.187	0.763	0.004	-0.008	-0.003	-0.001	0.000	0.001
50	50	11.574	0.499	-0.002	-0.001	-0.002	0.000	0.000	0.001
100	100	8.315	0.300	-0.004	0.001	-0.001	0.001	0.000	0.000
200	200	5.056	0.061	-0.009	-0.002	0.000	0.000	-0.001	0.000
1000	1000	2.070	-0.005	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000

分散

分散		0.01	0.1	1	2	3	4	5	10
n \ r	r								
2	2	3.204	2.519	1.665	1.594	1.140	1.141	1.047	1.020
5	5	1.310	0.475	0.607	0.413	0.420	0.416	0.422	0.420
10	10	0.462	0.307	0.236	0.201	0.212	0.207	0.207	0.191
20	20	0.257	0.190	0.112	0.093	0.111	0.106	0.102	0.099
30	30	0.100	0.081	0.071	0.070	0.068	0.061	0.061	0.065
50	50	0.068	0.112	0.039	0.041	0.041	0.042	0.037	0.043
100	100	0.037	0.026	0.019	0.021	0.020	0.025	0.020	0.019
200	200	0.021	0.017	0.010	0.010	0.010	0.009	0.010	0.010
1000	1000	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002

MSE

MSE		0.01	0.1	1	2	3	4	5	10
n \ r	r								
2	2	3.566	2.821	1.669	1.596	1.141	1.141	1.047	1.020
5	5	1.450	0.597	0.608	0.413	0.420	0.416	0.422	0.420
10	10	0.544	0.349	0.237	0.201	0.212	0.207	0.207	0.191
20	20	0.289	0.203	0.112	0.093	0.112	0.106	0.102	0.099
30	30	0.126	0.087	0.071	0.070	0.068	0.061	0.061	0.065
50	50	0.082	0.114	0.039	0.041	0.041	0.042	0.037	0.043
100	100	0.044	0.027	0.019	0.021	0.020	0.025	0.020	0.019
200	200	0.024	0.017	0.010	0.010	0.010	0.009	0.010	0.010
1000	1000	0.003	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002

表5. デルタ法による分散とシミュレーションによる分散の差 (小数点以下6桁は四捨五入)

推定量 a) r

推定量 a) r		0.01	0.1	1	2	3	4	5	10
n \ r	r								
2	2	0.51980	0.57442	0.38568	0.21038	0.06750	0.07145	-0.02856	0.05242
5	5	0.22184	0.22005	0.10398	0.02571	0.00884	0.02333	0.02358	0.01630
10	10	0.12000	0.11101	0.03377	0.00946	0.00606	0.00151	0.01335	0.00668
20	20	0.05541	0.05330	-0.00025	0.00119	0.00155	0.00386	0.00764	0.00030
30	30	0.03968	0.03677	0.00069	0.00744	0.00364	0.00112	0.00035	0.00288
50	50	0.02320	0.02284	0.00010	0.00055	-0.00114	0.00160	-0.00046	0.00070
100	100	0.01054	0.00890	0.00017	-0.00012	-0.00001	0.00087	-0.00022	-0.00019
200	200	0.00587	0.00407	0.00032	-0.00030	0.00014	-0.00078	0.00016	-0.00007
1000	1000	0.00111	0.00036	0.00002	-0.00011	-0.00010	-0.00001	-0.00004	0.00001

い推定量が良いと考えるならば, 推定量 (b) の補正はあまり有効でない, 以下では推定量 (a) を用いることにした。

表4によると, 推定量 (a) の分散はrの大きさが変わってもそれほど大きく変化しないことが見て取れる。推定量 (a) を用いたとき, デルタ法により分散を求めると,

$$\text{Var}(r) = \frac{2}{n} r^2 \tag{30}$$

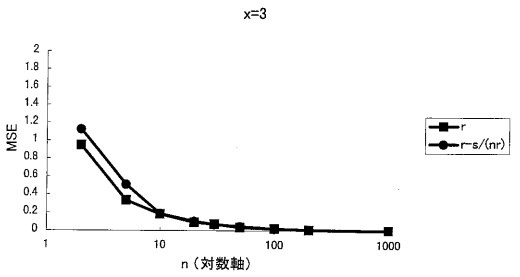
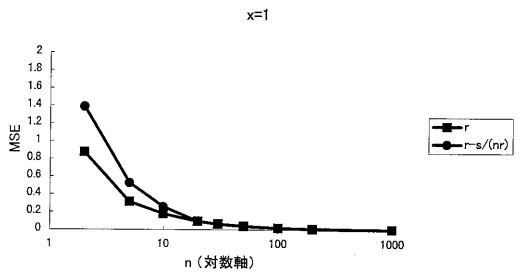
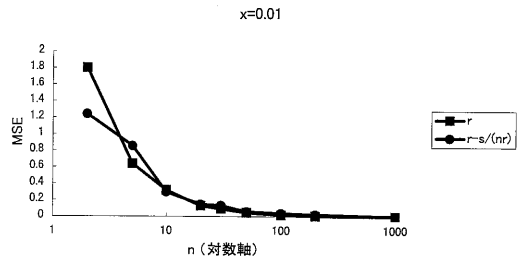


図6. x=1のときのMSEの変化

となる。この式はrに依存しないので, 式は分散の良い推定値となることが予想される。実際, これを用いて分散を計算し, シミュレーションによる推定値との差を見ると, r/1であればその値は非常によく一致していることが分かる(表5)。ただし, r/ < 1のときはサンプル数を増やさなければ, あまりよく一致しない。これは, デルタ法を使うにはテイラー展開の1次の項までで十分に近似が良くなければならないが, r/ < 1のときそれでは近似が不十分であるためである。簡単な計算により,

$$E(r^2) = \frac{4}{n} r^2 + r^2 \tag{31}$$

が分かるので, これと近似分散(30)を公式 {E(X)}^2=E(X^2) - Var(X)に適用すれば, 推定量 (a) の近似期待値が以下の式で与えられる。

$$E(r) = \sqrt{\frac{2}{n} r^2 + r^2} \tag{32}$$

これらの分散, 期待値の式(30), (32)は, 測定器の誤差がrに比してそれほど大きくなければ, かなり良い近似になると予想される。

よって, 95%信頼区間で考えて誤差の範囲を100c%に抑えるとき最低必要なサンプル数は, 次の式より求め

られる．

$$\left(\sqrt{\frac{2}{n} r^2 + r^2} - r\right) + \left(2 \frac{2}{n}\right) r = c^2 \quad (33)$$

これを解くと、

$$n = \left(\frac{r}{c}\right)^2 \left\{ \frac{(10c^2 + 20c^2 + 16) + 8(1+c)\sqrt{c^2 + 2c + 4}}{(c^2 + 2c)^2} \right\} \quad (34)$$

が得られる．上式に r/c の値と $c=0.01$ を代入すると、95%信頼区間で考えて距離の誤差を1%に抑えるためのサンプル数が求められる． $c=0.01$ のとき、 $\{(10c^2+20c^2+16)+8(1+c)\sqrt{c^2+2c+4}\}/\{(c^2+2c)^2\}=80199.87$ であるから、誤差を1パーセント以下に抑えるのに必要なサンプル数は、測定器の精度が良い($r/c=20$)場合には、 $80199.87 \times (1/20)^2=200.50$ より、200個程度となる．しかし、測定器の精度が悪ければ($r/c=1$)、多くのサンプル(80200個)が必要となる．

以上のことから、以下の2点が分かった．

- ・推定量(b)を用いても、分散が大きいため有効な改良とならない．
- ・推定量(a)を用いたとき、延縄の浮子間距離のように真の距離に比して測定器の精度が良いとき($r/c=20$)は、標本数が200個以上あれば精度の良い推定が可能である．

実 験

1) GPSについて

GPSは地球を周回する衛星からの電波信号を受信し、発信時刻と受信時刻との差から観測点の地球上の位置を推定する技術である．その際、観測点の3次元の座標を得るためには少なくとも4個の衛星から同時に受信しなければならない．

民生用のGPSが位置測定に誤差を持つ原因はいくつか知られている(土屋・辻, 1995)．主要なものとしては、Selective Availability (SA)がある．これは、衛星を運行している米国国防省が軍事以外の利用を制限して、意図的に衛星からの信号(C/Aコードのタイミングおよび軌道情報)にノイズを乗せているためである．さらに、GPS受信機と衛星同士の相対的な位置関係があり、衛星同士が観測点からみて同じような位置あるいは直線に近い位置関係にあるときには幾何学的な原因で測位精度が低下する．この精度の低下はDOPと呼ばれる指標で評価される．また個々の衛星特有の誤差(搭載された原子時計の精度)や、電波が電離層や対流層を通過するとき起こる伝播速度の低下などがある．

延縄浮子間の距離の推定では相対的な位置関係のみが

分かればよい．よって、2点で同時に同じ衛星の組を使って各々単独測位を行ない、位置データ同士の差分をとると各々の点におけるSAや電離層・対流層での伝播速度の変化に基づく誤差がある程度打ち消し合うから、誤差はかなり押さえられることが見込まれる．このことを実証するため以下の実験を行った．

2) 屋上GPS実験

遠洋水産研究所の屋上にGPS受信機2個を25m隔てて設置し、1秒毎の受信データを約12時間取得した(1997年11月14日04:00-16:00 GMT)．GPS間の距離は巻き尺を用いて計測した．受信機は、市販のカーナビゲーション用のものと同様なSONY製のIPS-5000を使用し、データはRS-232Cを通してコンピュータ(セイコー電子製 BRAIN PAD)のディスクに記録した．得られるデータは、C/Aコードで、1秒毎の緯・経度、DOP値、8個までの衛星の受信状態(衛星番号、計算に使用・不使用、衛星の方向・高さ、受信レベル)等の情報が得られる．

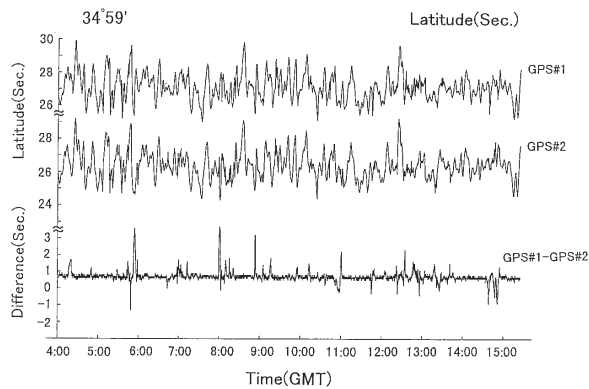
海上での使用と同様に受信機、電源、コンピュータは密封型のプラスチック製浮子(直径約40cm)に収納した状態で計測した．この受信機は8個までの信号を同時に受信でき、そのうちDOPの良い4個の組み合わせを選んで位置を計算する．

3) 結 果

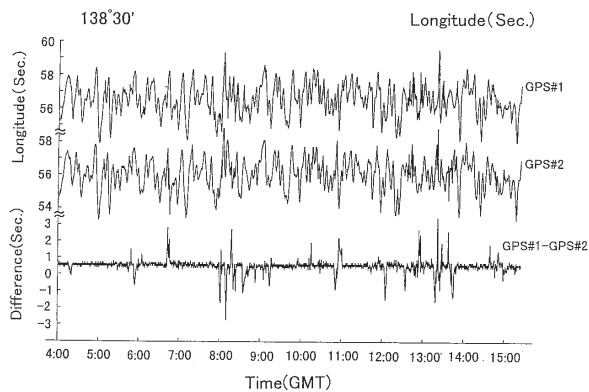
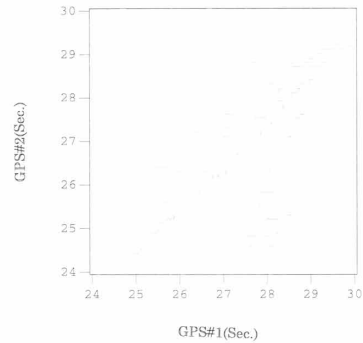
双方のGPS受信機から得られた1秒毎の位置の緯・経度を図7に示した．測定位置に関して、GPS#1, 2とも緯・経度それぞれの標準偏差は0.8-0.9秒程度である．緯・経度1秒の長さは実験場所(北緯34度59分、東経139度31分)でそれぞれ30.8m, 25.5m(東京天文台, 1989)に相当し、少なくとも緯・経度とも標準偏差で25m程度の誤差がある．これは誤差半径で35m程度であり、95%の信頼限界の半径はこの2倍程度になるので従来から言われてきた精度(100m)とほぼ一致する．

しかし、緯度・経度ともに、GPS#1, 2の測定値は似た変化を示しているため、その差は時折大きな値が現れるが、かなり安定している(図7, 図8)．各衛星は世界中に広く配置された衛星追跡ステーションにより詳しい軌道がモニターされ、衛星に最新の軌道情報を伝え、これにより各衛星は1-2時間おきに詳細な自身の軌道情報を得る．更新のタイミングによっては、新・旧の軌道情報の混乱により位置情報が不正確になることが知られている(土屋・辻, 1995)．明白にはずれ値と考えられる測定位置のいくつかはこの原因によ

GPSに用いた海上での延縄浮子間の距離推定



全データ サンプル数=41077 相関係数=0.912



同一衛星捕捉データ サンプル数=33007 相関係数=0.983

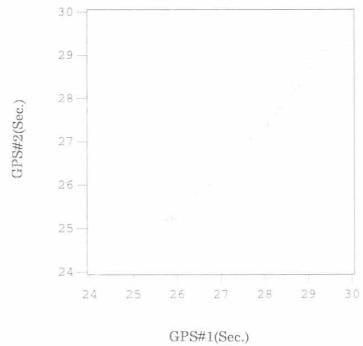


図7. 屋上実験から得られた毎秒の緯・経度の位置と距離の変移（上は緯度，下は経度）

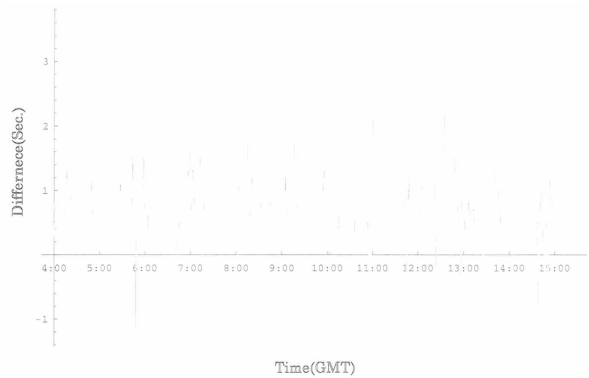


図8. 屋上実験から得られた毎秒の緯度の距離の衛星捕捉状況（青線は同一衛星捕捉データによるもの，赤線は異なる衛星捕捉データによるもの．経度については，同様であるので省略した）

るものであろう．

GPS#1, 2の測定値はかなり高い相関を保ちながら変化し，緯度・経度とも相関係数0.9以上である（図9上）．受信機同士は25mの近距離にあり，遮蔽物がなければ同一の衛星の組により測位するはずである．しかし実際には近くの構造物や木の影響で同一の衛星が見える保証がなく，同一の衛星で測位したのは全データの81%であった．2つのGPS受信機が異なる衛星の組によって測位した場合（図8の赤い線の部分）に大きな偏りを生じていることが分かる．そこで，同一の

図9. 2つのGPSによる位置測定データの相関図（経度については，同様であるので省略した）

衛星から得た測位データのみを選ぶと相関係数は緯度・経度とも0.98となる（図9下）．よって，同一衛星から計算した位置データを選べば，かなり正確に距離が求まると期待される．実際，このデータから各点の全期間（12時間）の平均の座標を求めて距離を計算すると25.5mとなり，真の距離とのずれは0.5mであった．

議 論

2つのGPSの測定位置が高い正の相関を示すことは，独立の誤差を仮定した場合より，計算される距離の偏りや分散を減少させることになる．なぜならば，同方向に同程度の大きさで両点がずれるため，1次元の場合で述べた偏りの原因である観測点の距離の方向の逆転現象は独立にランダムな誤差を仮定した場合より起こりにくくなり，かつ2点間の距離のばらつきは抑えられるので，より正確な測定となるからである．屋上実験でのデータのうちおよそ4時00分から14時30分

までの同一衛星捕捉データ(31000個)を用いて、それを2, 5, …, 1000個のデータに分割し、2点の距離の平均と標準偏差を計算した(表6)。表6より、シミュレーション(補遺8)と理論(式(30)及び(32))によって得られた平均、標準偏差と観測値から得られた平均、標準偏差を比較すれば、観測値による距離推定値はより良い精度の非常に安定した値を与えていることが分かる(上記観測結果より、 $n=25$ とした)。しかし、サンプル数を多くしても常に観測値による距離推定値の偏りが0.5m(25mの2%)程度あり、これは理論と矛盾している。この理由としては以下の2点が考えられる。

GPSの丸め誤差：市販のGPSは0.1秒(実験場所で緯度方向3.08m、経度方向2.55m)より小さい桁は表示しないので、四捨五入による誤差が混入する。

人為的な誤差：GPSがプラスチック製浮子の中に入っているため、GPSの位置を厳密に測定できない。

これらの誤差は2点間の真の距離の大小に依存しない固有のものである。屋上実験による観測では大きくても1m程度と考えられる(表6)ので、延縄の浮子間の距離を測定するような場合にはそれほど問題とはならないであろう。

さて、延縄の浮子間の距離の推定においては、陸上でのように山林のような自然物や人工の建築物などの障害物はないが、海面の波が存在する。浮子はその谷間に入ると仰角の低い衛星は見えなくなるから、2つのGPSが常に同じ衛星を選べるとは限らない。過去の観測によれば、延縄浮子に取り付けたGPSの同一衛星捕捉割合は約70%であった。GPSは1秒に1回測値を与えるので、1分間には60個の観測値が得られる。したがって、理論的には浮子に市販のGPSを搭載($n=25$)して5分間のデータを集めれば、 $5 \times 60 \times 0.7=210$ 個のデータが得られる。よって、有効データ数を200個とすると、標準偏差は $25 \times (2/200)=2.5$ mとなる。浮子間の距離がおよそ500mでは、偏りは0で、 $2 \times$ 標準偏

差でも5mであるから、誤差は $5/500=0.01$ となる。実際の観測では、標準偏差が理論より小さくなっている(表6)ことから、誤差を1パーセント以下に抑える目的は十分に達成可能である。一般に、海面上での漂流物間の距離測定に関しては、それに要する時間は短い方が良いと考えられる。なぜなら、海面上の浮子は海上風や波、海流や海洋中の乱流によって常に位置が変化するためである。故に、延縄の浮子間の距離測定においては、5分程度の観測値により計算するのが最も良いであろう。

ただし、海がひどく荒れているとき同一衛星捕捉割合は更に減少し、より長時間の測定が必要となると予想される。はえ縄は漁具の大部分が海中にあり、浮子はこれに束縛されているから、海上風の影響が浮子間の距離に短時間に大きく影響するとは考えにくい。吹送流や波力の影響で浮子の運動はより複雑なものになるかもしれない。この場合には浮子間の距離の変動は激しくなると考えられるので、測定時間を短くすべきという要求は更に高まる。それ故、上で行った議論を厳密に一般化するためには、より多くの知見を集めて更に詳細な議論をする必要がある。

まとめ

本研究により得られた主な成果は以下の通りである。

- 1) 距離の推定量としては最尤推定量を用いるのがよい。
- 2) 測定器の精度が比較的良好な場合、2次元距離の分散はデルタ法による近似分散で十分よく近似される。
- 3) 2つのGPSにより得られる位置観測データは強い正の相関を持つ。そのデータのうち同一衛星を捉えたものだけを取り出せば、はずれ値が取り除かれ、より高い相関を持つデータが得られる。
- 4) GPSより得られたデータを用いた2点間の距離推定

表6. 屋上実験データによる距離の推定値

(理論値は公式(25)、(27)によって計算されたもの、シミュレーション値は補遺8のシミュレーションによるものに25を掛けたもの)								
観測区間数	観測値			理論値($n=25, \sigma=25$)		シミュレーション($n=25, \sigma=25$)		
	平均	標準偏差		平均	標準偏差	平均	標準偏差	
2	15500	25.867	4.102	35.355	25.000	37.696	19.638	
5	6200	25.850	3.937	29.580	15.811	29.876	13.150	
10	3100	25.831	3.795	27.386	11.180	28.577	9.977	
20	1550	25.788	3.461	26.220	7.906	26.141	7.525	
30	1033	25.762	3.256	25.820	6.455	25.934	6.332	
50	620	25.706	2.988	25.495	5.000	25.264	4.963	
100	310	25.649	2.536	25.249	3.536	25.190	3.577	
200	155	25.574	2.004	25.125	2.500	25.205	2.298	
300	103	25.555	1.598	25.083	2.041	25.020	2.014	
400	77	25.525	1.446	25.062	1.768	25.077	1.701	
500	62	25.518	1.273	25.050	1.581	25.042	1.549	
600	51	25.579	1.096	25.042	1.443	24.999	1.473	
700	44	25.495	1.024	25.036	1.336	25.024	1.364	
800	38	25.535	0.932	25.031	1.250	25.020	1.264	
900	34	25.532	0.876	25.028	1.179	25.046	1.179	
1000	31	25.489	0.979	25.025	1.118	24.933	1.102	

値の誤差は、独立性・ランダム性を仮定したときの偏りや分散から得られるものよりも小さくなり、高精度の推定が可能となる。

5) 海面上の浮子間の距離の場合、一般には市販のGPSによるおよそ5分（有効データ数200個）ぐらいの位置データを用いれば、距離の推定誤差は1%弱に抑えられる。

謝 辞

遠洋水産研究所北洋資源部の平松一彦主任研究官には本原稿を閲読していただき全体にわたって多くのご指導、ご校閲を賜った。同研究所浮魚資源部の竹内幸夫技官、庄野 宏技官にも、特に統計的な解析に関して有益な議論をしていただいた。更に同研究所外洋資源部森 純太技官には、原稿に目を通していただき、多くの誤りを指摘し訂正していただいた。また、東京大学教養学部社会科学科の岸野洋久助教授、国土地理院測地観測センターの宮崎真一氏、東北大学理学部宇宙地球物理学科海洋物理学講座の木津昭一博士は初期原稿に目を通し、いくつもの有益な助言を下さった。これらの方々には心から厚く御礼申し上げる。

補 遺

1. 推定量が不偏であることの証明

簡単のため、 $d = \sqrt{(y_{i1} - y_{i0})^2}$ とする。期待値を計算すると、

$E(d) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{sign}(y_{i1} - y_{i0}) \times d\right) = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^n E(\text{sign}(y_{i1} - y_{i0}) \times d) = E(\text{sign}(y_{i1} - y_{i0}) \times d)$ 。
ここで、 $Z = Y_2 - Y_1$ とすると、正規分布の再生性から、 $Z \sim N(x, 2\sigma^2)$ であるので、

$$\begin{aligned} E(\text{sign}(y_{i1} - y_{i0}) \times d) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(z) \sqrt{z^2} \exp\left(-\frac{(z-x)^2}{4\sigma^2}\right) dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\sqrt{2} t+x) \sqrt{(\sqrt{2} t+x)^2} e^{-t^2} dt \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^0 (\sqrt{2} t+x) e^{-t^2} dt + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} (\sqrt{2} t+x) e^{-t^2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2} t+x) e^{-t^2} dt \end{aligned}$$

ここで、 $\int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2} dt = [-\frac{1}{2} e^{-t^2}]_{-\infty}^{\infty} = 1$ 、 $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi/2}$ などを用いれば、 $E(d) = x$ となり証明される。

2. 推定量の偏りの評価

$Z = Y_x - Y_0$ とすると正規分布の再生性から、 $Z \sim N(x, 2\sigma^2)$ であるので、

$$E(\sqrt{(y_x - y_0)^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{z^2} \exp\left(-\frac{(z-x)^2}{4\sigma^2}\right) dz = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{(\sqrt{2} t+x)^2} e^{-t^2} dt$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^0 (\sqrt{2} t+x) e^{-t^2} dt + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} (\sqrt{2} t+x) e^{-t^2} dt \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2}} \left\{ \int_{-\infty}^0 (\sqrt{2} t+x) e^{-t^2} dt - \int_{-\infty}^0 (\sqrt{2} t+x) e^{-t^2} dt \right\} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \int_0^{\infty} (\sqrt{2} t+x) e^{-t^2} dt + \int_0^{\infty} (\sqrt{2} t+x) e^{-t^2} dt \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} (\sqrt{2} t+x) e^{-t^2} dt - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^0 (\sqrt{2} t+x) e^{-t^2} dt + \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} (\sqrt{2} t+x) e^{-t^2} dt \end{aligned}$$

公式、 $\int_0^{\infty} t e^{-t^2} dt = 1$ 、 $\int_0^{\infty} x e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi/2}$ などを用いれば、最後の式の第1項と第2項の和は、 $2/\sqrt{2}$ となる。

第3項は、

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^0 \sqrt{2} t e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^0 [-e^{-t^2}]_{-\infty}^0 = \frac{2}{\sqrt{2}} (-1 + e^{-x^2/2}), \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^0 x e^{-t^2} dt = \frac{2x}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^0 e^{-t^2} dt = 2x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^0 e^{-t^2} dt - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt \right) \\ &= 2x \left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right). \end{aligned}$$

ここで、 (\cdot) は標準正規分布の累積分布関数である。結局、

$$E(d) = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{-x^2/2} + x - 2x \left(-\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

となる。

ちなみに、 $g(x)$ を微分すると、

$$g'(x) = -2 \left(-\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

(\cdot) は、累積分布関数であるから、 $g'(x) < 0$ 。よって、 $g(x)$ は単調減少関数である。

さて、ここで

$$f(x) = x \left(-\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = x \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^0 e^{-t^2} dt$$

を考えると、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{1/x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{-1/x^2} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x^2/2} = 0 \end{aligned}$$

となる（上の式で第3式から第4式へはL'Hospitalの定理を用いた）。

よって、 $g(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$) となり、グラフが図2のようになることが示される。

3. 推定量dの偏りの評価

$1/n \sum Y_{i1} \sim N(x, \sigma^2/n)$ と $1/n \sum Y_{i0} \sim N(0, \sigma^2/n)$ なので、正規分布の再生性により、その差Zが $N(x, 2\sigma^2/n)$ に従うことを用いれば、 $\langle d \rangle$ のときと同様な計算により、

$$E(\hat{d}) = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{2/n}} \int_0^{\infty} z \exp\left(-\frac{z^2}{4} \frac{1}{n}\right) dz = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} \sqrt{(2/n) t+x} e^{-t/2} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} (\sqrt{2/n} t+x) e^{-t/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} (\sqrt{2/n} t+x) e^{-t/2} dt + \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} (\sqrt{2/n} t+x) e^{-t/2} dt$$

これから,

$$E(\hat{d}) = \frac{2}{\sqrt{n}} e^{-nx^2/4} + x - 2x \left(-\frac{x}{\sqrt{2/n}}\right)$$

となる.

4. 推定量の偏りの評価

前と同様に, $Z=Y_x - Y_0$ とおくと, $Z \sim N(x, 2^{-2})$ である. よって, $\frac{x}{\sqrt{2}} \sim N\left(\frac{x}{\sqrt{2}}, 1\right)$ であるので, $V = \sum_{i=1}^n \frac{Z^2}{2^2}$ は自由度 n , 非心度 $= \sum_{i=1}^n \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{nx^2}{2}$ の非心カイ2乗分布に従う. 自由度 n , 非心度 $\frac{nx^2}{2}$ の非心カイ2乗分布の密度関数は,

$$f(x) = e^{-x^2/2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^i = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2+i}\right)^{2+i-1} e^{-x^2/2} \quad (x > 0)$$

で与えられるので,

$$E(\hat{d}) = \int_0^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} v e^{-nv^2/4} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\frac{nv^2}{4}\right)^i \frac{1}{2} \left(\frac{v}{2+i}\right)^{2+i-1} e^{-v^2/2} dv$$

となる. 従って,

$$E(\hat{d}) = \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(nx^2/4)^i e^{-nx^2/4}}{i!} \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{v}{2+i}\right)^{2+i-1} e^{-v^2/2} dv$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(nx^2/4)^i e^{-nx^2/4}}{i!} \frac{((n+1)/2+i)}{(n/2+i)}$$

5. 1次元の各推定量の分散

分散 V は, 公式

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

を用いて計算する.

まず, $\langle d \rangle$ の推定量の分散を計算すると,

$$E\left\{\sqrt{(y_{x_i} - y_{0_i})^2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{2}} \int_0^{\infty} z \exp\left(-\frac{z^2}{4} \frac{1}{n}\right) dz$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\sqrt{2} t+x) e^{-t/2} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} (2^{-2} t^2 + 2\sqrt{2} t+x) e^{-t/2} dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} t e^{-t/2} dt + \frac{x}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} e^{-t/2} dt$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} s^{1/2} e^{-s} ds + x^2$$

$$= 4^2 \left(\frac{3}{2}\right) + x^2 = 4^2 \sqrt{\frac{3}{2}} + x^2$$

$$= 2^{-2} + x^2$$

従って,

$$V(\hat{d}) = \frac{1}{n} V\left(\sqrt{(y_{x_i} - y_{0_i})^2}\right) = \frac{1}{n} (2^{-2} + x^2 - (x+g(x))^2)$$

同様な計算により, \hat{d} の推定量の分散,

$$V(\hat{d}) = 2^{-2}/n$$

が得られる.

\hat{d} の分散は,

$$E(\hat{d}^2) = E\left\{\sqrt{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{x_i} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{0_i}\right)^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{2/n}} \int_0^{\infty} z^2 \exp\left(-\frac{z^2}{4} \frac{1}{n}\right) dz$$

$$= \frac{2}{n} + x^2$$

従って,

$$V(\hat{d}) = E(\hat{d}^2) - \{E(\hat{d})\}^2$$

$$= \frac{2}{n} + x^2 - (x+h(x,n))^2$$

\hat{d} の分散は,

$$E(\hat{d}^2) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_{x_i} - y_{0_i})^2\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E((y_{x_i} - y_{0_i})^2) = E((y_{x_i} - y_{0_i})^2)$$

$Z = Y_x - Y_0 \sim N(x, 2^{-2})$ であるから,

$$E((y_{x_i} - y_{0_i})^2) = 2^{-2} + x^2$$

よって,

$$V(\hat{d}) = 2^{-2} + x^2 - (x+k(x,n))^2$$

と求められる.

6. \hat{d} を用いた2次元推定量の期待値

吉澤 (1989, 第7章) の方法に従う. 本文より,

$$m_x \sim N(x, 2^{-2}/n), m_y \sim N(y, 2^{-2}/n)$$

であるから, $t = (m_x - x)/(\sqrt{2/n})$, $s = (m_y - y)/(\sqrt{2/n})$

とおき, (14)式の関数をテイラー展開して

$$\varphi(x+t, y+s) = \varphi_0 + \sqrt{\frac{2}{n}} (t\varphi_{10} + s\varphi_{01}) + \frac{1}{n} (t^2\varphi_{20} + 2ts\varphi_{11} + s^2\varphi_{02}) + \dots$$

と書く. ここで, $\varphi_0 = \varphi(x, y)$ であり, $\varphi_{m,n}$ などは,

$$\varphi_{m,n} = \frac{\partial^m \varphi(x, y)}{\partial x^m \partial y^n}$$

を表す. これを用いて, $E[\sqrt{m_x^2 + m_y^2}]$ を計算すると s と t の奇数べきの積分は消えるので, 以下のように, 本文(15)式を得る.

$$E[\sqrt{m_x^2 + m_y^2}] = E[\varphi(m_x, m_y)] = \frac{1}{4\pi\sigma^2/n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(m_x, m_y) e^{-((m_x-x)^2 + (m_y-y)^2)/(4\sigma^2/n)} dm_x dm_y$$

$$= \varphi_0 + \frac{\sigma^2}{n} \varphi_{11} + \frac{\sigma^4}{n^2} \varphi_{22} + \dots$$

7. \hat{d} を用いた2次元推定量の期待値

補遺3より, $\hat{d} = \sqrt{Z^2}$, $z \sim N(x, 2^{-2}/n)$ であるから,

$$m_x = \sqrt{Z^2}, m_y = \sqrt{Z^2}, (z_x \sim N(x, 2^{-2}/n) = z_y \sim N(y, 2^{-2}/n))$$

であるから,

$$\varphi(m_x, m_y) = \sqrt{m_x^2 + m_y^2} = \sqrt{(\sqrt{Z^2})^2 + (\sqrt{Z^2})^2} = \sqrt{Z^2 + Z^2}$$

となる. 従って, この関数 φ に関して期待値や分散を求める場合には, m_x, m_y はそれぞれ正規分布 $N(x, 2^{-2}/n)$, $N(y, 2^{-2}/n)$ に従うと考えてよい. よって, 補遺6と同様に, 以下のように本文(20)得る.

$$E[\sqrt{m_x^2 + m_y^2}] = E[\varphi(m_x, m_y)] = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(m_x, m_y) e^{-\frac{1}{2}(m_x^2 + m_y^2)} dm_x dm_y$$

$$= \varphi_0 + \frac{1}{n} \varphi_{m_x} + \frac{1}{n} \varphi_{m_y} + \dots$$

8. シミュレーションの詳細

シミュレーションは、S-Plusを用いて行った。以下にその手順を述べる。

- 1) (2次元の) 真の距離rと標本数nを与える。
- 2) 区間[0,1]の一樣乱数uを一個発生させ、与えられた真の距離をx軸(緯度)とy軸(経度)に割り振る。

$$x = ru, \quad y = rx\sqrt{(1-u^2)}$$

- 3) $x_b \sim N(x, 1)$, $x_a \sim N(0, 1)$, $y_b \sim N(y, 1)$, $y_a \sim N(0, 1)$ をそれぞれn個発生させ、本文中に与えられた推定量(a)または(b)を用いて距離を計算する

ただし、推定量(b)を用いた場合は、の不偏推定量として、

$$\hat{\Delta}^2 = s^2 = (s_{x_a}^2 + s_{x_b}^2 + s_{y_a}^2 + s_{y_b}^2) / 4$$

を用いた。ここで、 $s_{x_a}^2$ などは各点の不偏推定量である。これが不偏であることは、

$$E(\hat{\Delta}^2) = \frac{1}{4} E(s_{x_a}^2 + s_{x_b}^2 + s_{y_a}^2 + s_{y_b}^2) = \frac{1}{4} (4r^2) = r^2$$

と容易に示される。

- 4) 上の1)~3)の操作を1000回繰り返してその平均と分散を計算する。

参考文献

土屋 淳・辻 宏道 1995：GPS測量の基礎。日本測量協会，東京，274pp。

水野恵介・岡崎 誠・中野秀樹・岡村 寛 1997：小型BTを利用したまぐろ延縄の水中姿勢の推定。遠洋水産研究所研究報告，(34)，1-24。

竹内 啓 1963：数理統計学。東洋経済新報社，東京，373pp。

東京天文台 1989：理科年表。丸善，東京，1032pp。

吉澤康和 1989：新しい誤差論。共立出版株式会社，東京，261pp。