

最尤法による水産資源の統計学的研究  
—パラメータ推定とモデル選択—

平松 一彦\*

A Statistical study of fish population dynamics  
using maximum likelihood method  
—Parameter estimation and model selection—

Kazuhiko HIRAMATSU\*

**Abstract**

The data used in the fish population dynamics are often subject to considerable stochastic variations and measurement errors. It is necessary to use sound statistical techniques in the analysis of data. Although the linear least square method (linear regression) has been used in the estimation procedure, there are some disadvantages such as necessity of linearization and underlying assumption of normal distribution. Recently, there is increasing interest in the maximum likelihood method. However, the application of maximum likelihood method for fisheries science is still limited and the advantages of this method are not well known.

In this paper, the estimation of stock-recruitment relationship, the determination of the mesh selectivity curve, the estimation of mortality rates from tag recoveries, and the DeLury method of estimating population abundance are studied using the maximum likelihood method. The advantages of maximum likelihood parameter estimation and model selection are shown through above examples. The traditional approaches are also discussed.

**1. Outlines of maximum likelihood method**

Maximum likelihood parameter estimates can be found by maximizing the likelihood function which is derived from the probability (or probability density) function. In this paper, model parameters are estimated using the simplex search method. AIC (Akaike Information Criterion) is used for selecting an optimal model. The model with minimum AIC is the most likely model. The precision of parameter estimates can be evaluated by the Fisher information matrix.

The probability distributions commonly used in the likelihood function are the binomial distribution, the multinomial distribution, and the normal distribution. In this paper, I introduce the normal approximation of binomial and multinomial distribution, and their distributions with

overdispersion parameter  $\sigma^2$ .

The statistical characteres of the maximum likelihood estimator are consistency, asymptotic efficiency, and asymptotic unbiasedness. When errors are normally distributed, maximum likelihood and least square procedures are equivalent.

## 2. Estimation of stock-recruitment relationship

The stock-recruitment relationships considered in this paper are the Beverton-Holt curve, the Ricker curve, and no relation. As a stochastic model, I consider the model normally and log-normally distributed around the theoretical curves, as well as the model based on the simple linear regression.

I apply these models to pink salmon and chum salmon. The results indicate that the transformation of equation for calculation varies the stochastic model and the parameter estimates. These examples also demonstrate that the models based on the simple linear regression are not always the optimal model.

## 3. Determination of the mesh selectivity curve

In the estimation of the mesh selectivity curve from covered-net experiment data, the sample sizes of fish vary in the fish length. This makes it difficult to make a sound estimation. I develop a maximum likelihood procedure for fitting binomially distributed data which explicitly take these concerns into account.

The mesh selectivity curve is estimated from the covered-net experiment data of sole. The sigmoid curve and the extended sigmoid curve are fitted as the mesh selectivity curve.

The hypothesis that a selectivity curve is a function of fish length and mesh size is studied based on the model comparison using AIC.

## 4. Estimation of mortality rates from tag recoveries

The log-linear model and the multinomial model have been used in the estimation of mortality rates from tag recoveries. In this paper, I consider new models such as the normal distribution, the multinomial distribution, the normal approximation of multinomial distribution (generalized, generalized with  $\sigma^2$ , weighted, and weighted with  $\sigma^2$ ), as well as traditional two models. The model ignoring the natural mortality is also discussed.

I apply these models to prawn, red seabream, and swimming crab. The comparison between traditional two models which has not been done is possible using AIC. Since the optimal model varies in examples, it is desirable to consider several models and compare them.

The presence of overdispersion parameter  $\sigma^2$  may have a significant impact on parameter estimates.

## 5. DeLury method of estimating population abundance

DeLury's first and second model, and binomial model have been used in the DeLury method of estimating population abundance. I consider new models such as the normal approximation of

binomial distribution (with  $\sigma^2$ ), the normal approximation of multinomial distribution (with  $\sigma^2$ ), the normal distribution, as well as traditional three models. The model introduced the natural mortality coefficient is also discussed.

I apply these models to the catch and effort data from Japanese common goby and blue crab. As in tag recoveries, the optimal model varies in examples. In general, DeLury's first model and second model are relatively appropriate. On the other hand, since the binomial distribution model may underestimate the standard errors, caution should be needed for using this model.

## 6. Discussion

The advantages of the maximum likelihood method are that this approach explicitly takes the nature of the data into consideration, the modeling is quite flexible, and AIC can be used as a guide to the relative merit of various models.

The disadvantages of this method are difficulty in calculation, the possibility of using an inappropriate model, and biases of maximum likelihood estimators in finite sample sizes.

In the earlier times, simple models and crude approximations were absolutely essential and much effort was required to solve the equation. The widespread application of the maximum likelihood method and availability of high-speed computers make it possible to use more realistic model.

## 目次

第I章 緒言 .....	62
I-1 はじめに .....	62
I-2 研究の歴史 .....	62
I-3 記号 .....	63
第II章 最尤法の概要 .....	65
II-1 最尤法 .....	65
1-1 定義と手順 .....	65
1-2 仮説検定とモデル選択 .....	66
1-3 区間推定 .....	66
II-2 尤度構成の基本となる確率分布 .....	67
II-3 最尤法の一般的な性質 .....	70
3-1 最尤推定量の性質 .....	70
3-2 最小2乗法との関係 .....	70
II-4 使用した最適化プログラム .....	71
第III章 再生産式の推定 .....	71
III-1 はじめに .....	71
III-2 再生産式の推定とモデル比較 .....	72
2-1 尤度関数の導出 .....	72
2-2 モデル比較 .....	75
III-3 議論 .....	76
第IV章 網目選択曲線の推定 .....	80
IV-1 はじめに .....	80
IV-2 網目選択曲線の推定とモデル比較 .....	80
2-1 網目選択曲線の推定方法 .....	80
2-2 モデル比較 .....	81
2-3 仮説の検討 .....	83
IV-3 議論 .....	86
第V章 標識再捕法による死亡係数の推定 .....	87
V-1 はじめに .....	87
V-2 標識再捕法におけるパラメータ推定とモデル比較 .....	87
2-1 尤度関数の導出 .....	87
2-2 モデル比較 .....	91
V-3 議論 .....	94

第VI章 DeLury 法 .....	95
VI-1 はじめに .....	95
VI-2 DeLury 法におけるパラメータ推定とモデル比較 .....	96
2-1 尤度関数の導出 .....	96
2-2 モデル比較 .....	100
VI-3 議論 .....	101
第VII章 総合討論 .....	103
VII-1 最尤法による推定の長所 .....	103
VII-2 最尤法による推定の短所 .....	104
VII-3 展望（おわりに） .....	105
摘 要 .....	105
謝 辞 .....	106
文 献 .....	107
付 録 .....	110

## 第 I 章 緒 言

### I-1 はじめに

水産生物の特性の解明や適切な管理のためには、資源量や死亡係数といったパラメータを推定したり、再生産関係や成長曲線あるいは漁具の選択性などを明らかにすることが必要である。これらは多くの場合、漁業や調査船のデータをもとに推定されている。基礎となるデータには測定誤差やサンプリングによる確率変動などが含まれるため、推定には適切な統計学的手法の使用が不可欠である。

水産資源解析学では、従来から様々な統計学的手法が導入されてきた。特に線形最小 2 乗法（線形回帰）は計算が容易であるため、パラメータ推定の方法として現在広く用いられている。線形最小 2 乗法では、推定したいパラメータについて線形あるいは線形近似した式を用い、正規分布のばらつきを仮定し、残差平方和が最小になるようパラメータ推定を行う。

線形化した式あるいは線形近似した式では現象をうまく扱えず、またばらつき方として正規分布では不適切な場合もある。このため最近水産資源解析学では、線形最小 2 乗法を用いた線形モデルによる解析から、最尤法を用いた非線形モデルによる解析への転換がおりつつある。

最尤法ではデータの発生確率モデルから直接未知のパラメータを推定するため、より現象に即した関係式やデータのばらつき方を考慮することができる。しかし、線形最小 2 乗法に比べ概念が難しく、計算も複雑となることが多いため、これまでその使用は限られたものであった。最尤法を用いた解析の利点もあまり一般には知られていない。

本研究では最尤法を用いて、再生産式の推定、網目選択曲線の推定、標識再捕法による死亡係数の推定、および DeLury 法による資源尾数と漁獲能率の推定を行う。上記の実例を通して最尤法の利点を明らかにすると共に、従来の解析方法についても再検討する。最尤法による方法論を確立し、従来よりも現象に即した適切な推定を可能とすることを目的とする。

本論文の構成は次のとおりである。第 I 章では最尤法の水産資源学への適用に関する歴史について簡単に述べた。第 II 章では、具体的な解析に先立ち、最尤法の基本的な考え方について概要を述べた。第 III 章では、再生産式の推定を最尤法により行い、従来の線形化したモデルでは不適切な推定値しか得られない場合があることを示した。第 IV 章では 2 項分布のモデルを考えることにより、網目選択曲線の適切な推定法を導いた。第 V 章では、1 回放流の標識再捕試験の死亡係数の推定において、従来から用いられてきた対数回帰による推定方法と多項分布による推定方法の比較、および正規分布、多項分布の正規近似などの新しいモデルについて検討した。第 VI 章では、従来から用いられてきた DeLury 法における第 1 モデル、第 2 モデル、および 2 項分布モデルの比較、さらに正規分布、多項分布の正規近似などの新しいモデルについて比較検討した。最後に第 VII 章において、最尤法の長所・短所について最小 2 乗法と比較しながら議論した。

### I-2 研究の歴史

水産資源学におけるパラメータや関係式の推定法は線形回帰が主流である。成長曲線・体長体重関係・再生産曲線といった関係式や、漁獲係数・自然死亡係数・資源尾数といったパラメータはデータから線形回帰により求められていることが多い。しかし、幾つかの分野においては従来から最尤法による推定も試みられている。最尤法による推定が古くから行われている分野としては、標識再捕法と DeLury 法を挙げることができる。

標識再捕法では、Gulland (1955), Paulik (1963) が多項分布を用いた場合の漁獲係数  $F$ , 全減少係数  $Z$  の最尤推定量を得ている。最近ではこれらを発展させたものとして、Kitahara *et al.* (1986), 北田・平野 (1987), Farebrother (1988) 等がそれぞれ、休漁期がある場合、再捕尾数が任意の期間ごとにまとめられた場合、および死亡係数に時間依存性を含む場合について検討している。

最尤法の外に線形回帰による推定方法も用いられているが、両者の方法を直接比較した研究はほとんどみられない。標識再捕の各モデルに関してはSeber (1982) と北田 (1989) のレビューに詳しい。

DeLury法では線形回帰による推定方法と共に、2項分布を用いた最尤法による推定方法がMoran (1951)やZippin (1956)らにより検討されてきた。その後、Schnute (1983), Matsumiya (1990), Akamine (1990) が2項分布を用いた最尤法による推定の拡張・検討を行っている。

標識再捕法とDeLury法の分野で比較的早くから最尤法による推定が行われたのは、最小2乗法では推定することのできない2項分布や多項分布のモデルを扱う必要があったためと考えられる。これは漁獲が単純ランダムサンプリングであると仮定すると、漁獲尾数の変動はそれぞれ2項分布や多項分布となるという後述する統計学的な裏付けによるものであるが、最尤法による推定は計算が難しくなるため、比較的統計学に堪能な研究者が活用しても、広く一般的には用いられていない。

近年上記以外の分野においても最尤法を用いた推定が増加の傾向にあり、例えばCanadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciencesや、Journal du Conseilという国際誌の論文では最尤法を使用しているものが多い(平松, 1990 a)。この2誌からここ数年で最尤法による研究が行われているものを挙げると、系群識別 (Gomulkiewicz *et al.*, 1990; Millar, 1987; Wood *et al.*, 1987)・性成熟率の推定 (Welch and Foucher, 1988)・コホート解析 (Lewy, 1988; Sparholt, 1990)・変態などの時間の推定 (Chambers and Leggett, 1989)・成長式の推定 (Schnute *et al.*, 1989)・体長と豊度の関係の推定 (Richards and Schnute, 1990)・標識再捕による移動の推定 (Hilborn, 1990)・体長組成の分解 (Fournier *et al.*, 1990) などがある。これらの中には最尤法の利点を必ずしも生かしていないものや従来の方法との比較が十分ではないものも散見される。

### I-3 記号

本論文中で用いられる記号は、全て関連の項で説明するが、ここで一覧にして示す。

記号	意味
AIC	赤池情報量規準
a	回帰係数 (第II章)
a	網目選択曲線のパラメータ (第IV章)
b	回帰係数 (第II章)
b	網目選択曲線のパラメータ (第IV章)
C	漁獲尾数
c	網目選択曲線のパラメータ (第IV章)
E	(再生産関係における) 親の量
F	漁獲係数
f	確率密度関数
H <sub>0</sub>	帰無仮説
I	Fisher情報量行列

i	添字
j	添字
k	負の2項分布の分散のパラメータ
L	尤度関数
L	魚の体長(第IV章)
$L_0$	東海-北原モデルのパラメータ(第IV章)
M	自然死亡係数
m	未知パラメータの数(第II章)
m	網の目目の長さ(第IV章)
$m_0$	東海-北原モデルのパラメータ(第IV章)
N	データの総数(第II章, 付録)
N	網口に入る魚の尾数(第IV章)
N	放流尾数(第V章)
N	初期資源尾数(第VI章)
$N(0, \sigma^2)$	平均0分散 $\sigma^2$ の正規分布
n	データ数
P	確率・確率関数
p	確率
Q	条件付尤度の再捕確率
q	漁獲能率
R	(再生産関係における)仔の量
t	ベクトルの転置
V	分散
X	漁獲努力量
x	最小2乗法における独立変数
Y	確率変数(ベクトル)
y	確率変数(成分)
y	最小2乗法における従属変数(II-3節)
Z	全減少係数
$\alpha$	再生産式のパラメータ
$\beta$	再生産式のパラメータ
$\Delta$	行列の余因子
$\varepsilon$	誤差
$\Theta$	未知パラメータ(ベクトル)
$\theta$	未知パラメータ(成分)
$\mu$	平均
$\pi$	円周率
$\rho$	相関係数
$\sigma$	標準偏差・標準誤差



$\sigma$	ばらつきのパラメータ
$\phi$	網目選択曲線
$\chi^2(m)$	自由度 $m$ のカイ 2 乗分布
$\Omega$	分散共分散行列

## 第II章 最尤法の概要

最尤法は理論的には優れた推定方法であるが、従来はその使用が限られていた。これは最小 2 乗法に比べ概念が難しいこと、適切な入門書が無かったこと、計算が複雑になる場合が多いことによると考えられる。本章では最尤法の基本的な考え方、計算方法、一般的な性質について述べる。

### II-1 最尤法

最尤法とは、得られたデータが最も出やすいようなパラメータの値を推定値とする方法である。(あるパラメータの値の下で) データが発生する確率を表わす確率関数あるいは密度関数を考える。これをパラメータの関数とみたものが尤度または尤度関数と呼ばれる。与えられたデータの下で尤度が最大となるパラメータの値を最尤法による推定値(最尤推定値という)とする。正確な定義および計算の手順は以下のとおりである。

#### II-1-1 定義と手順

尤度関数  $L(\theta | Y)$  とは、事象  $Y$  の発生する確率を表わす確率関数  $P(Y)$  または密度関数  $f(Y)$  を、パラメータ  $\theta$  の関数とみなしたものである。 $Y_1, \dots, Y_n$  において各  $Y_i$  が独立に密度関数  $f(Y)$  の分布に従っている場合、尤度関数は

$$L(\theta | Y_1, \dots, Y_n) = \prod_{i=1}^n f(Y_i) \quad (2.1)$$

となる。 $P(Y)$ 、 $f(Y)$  としては 2 項分布、多項分布、正規分布などが多く使われる。これらの具体的な形については II-2 節で詳しく述べる。

最尤法の手順は次のようになる。

#### ① 尤度関数 $L(\theta)$ を決める。

データの発生状況をよく考え、データの発生確率モデルを作り、それを尤度関数とする。

#### ② 尤度最大となるパラメータの値 $\hat{\theta}$ を求める。

与えられたデータの下で尤度が最大となるパラメータの値を求める。解析的に  $\hat{\theta}$  が求まる場合はまれで、数値的に求められることが多い。

#### ③ 仮説検定・モデル選択

経験的な仮説の検定には尤度比検定が用いられる。複数のモデルが考えられる場合には AIC(Akaike, 1973) により比較することができる。AIC が小さいほど良いモデルである。

#### ④ 区間推定

推定されたパラメータの標準誤差やパラメータ間の相関は、Fisher 情報量行列から分散共分散行列を求め算出される。尤度比や Bootstrap 法によるパラメータの区間推定も可能である。

なお③と④の仮説検定・モデル選択・区間推定については以下でさらに詳しく述べる。

## II-1-2 仮説検定とモデル選択

## (1)尤度比検定による仮説検定

帰無仮説を

$$H_0: \Theta \in \Theta_0 \quad (2.2)$$

とする。ここで

$$\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_m), \Theta_0 = (\theta_{10}, \dots, \theta_{m0}) \quad (2.3)$$

または $\Theta_0$ は $\Theta$ 空間の部分集合である。この帰無仮説は、データ数 $n \rightarrow \infty$ のときの $L(\hat{\Theta})$ と $L(\Theta_0)$ の比の対数が、次のような自由度 $m$ の $\chi^2$ 分布に従うことを利用して検定することができる。

$$2 \ln \left( \frac{L(\hat{\Theta})}{L(\Theta_0)} \right) \sim \chi^2(m). \quad (2.4)$$

## (2)AICによるモデル選択

AICは、考えているモデルと真の確率分布の近さを測る基準である、Kullback-Leibler情報量の定数項を除いた不偏推定量として導出され、次の式で表わされる(坂本ほか, 1983)。

$$AIC = -2 \ln(L(\hat{\Theta})) + 2 (\text{モデルの自由パラメータ数}), \quad (2.5)$$

Kullback-Leibler情報量を直接扱う場合には真の確率分布が必要であるが、AICはデータのみから計算することができる。

複数のモデルが考えられる場合は、最小のAICを与えるものが最も真の確率分布に近い良いモデルと判断する。AICの値の差が1~2程度以上であれば有意とされている(坂本ほか, 1983)。AICに拠ればパラメータ数の異なるモデル、3つ以上の複数のモデル、non nestedモデル(包含関係にないモデル)でも比較することができる。

## II-1-3 区間推定

## (1)Fisher情報量行列を用いる方法

推定値の分散共分散行列 $\Omega$ は次の式から計算することができる。

$$\Omega = - \{ \nabla_{\Theta}^t \nabla_{\Theta} \ln(L(\hat{\Theta})) \}^{-1} \quad (2.6)$$

ここで

$$\nabla_{\Theta} = \left( \frac{\partial}{\partial \theta_1}, \frac{\partial}{\partial \theta_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial \theta_m} \right). \quad (2.7)$$

$t$ は転置を意味する。これは分散共分散行列 $\Omega$ がFisher情報量行列 $I$ と

$$\Omega = (n I)^{-1} \quad (\text{ここで } n \text{ はデータ数}) \quad (2.8)$$

の関係にあり、さらにFisher情報量行列は

$$I_{ij} = - \frac{1}{n} \frac{\partial^2 \ln(L(\hat{\Theta}))}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \quad (2.9)$$

で推定できるためである。分散共分散行列が得られれば、その成分 $\Omega_{ij}$ を用いて

$$\text{標準誤差: } \sigma_i = (\Omega_{ii})^{1/2} \quad (2.10)$$

$$\text{相関係数: } \rho_{ij} = \frac{\Omega_{ij}}{(\Omega_{ii})^{1/2} (\Omega_{jj})^{1/2}} \quad (2.11)$$

が求められる。これからパラメータの推定精度とパラメータ間の相関の程度を知ることができる。

### (2) 尤度比を用いる方法

尤度比検定の考え方を利用して区間推定を行うことも可能である。自由度  $m$  の  $\chi^2$  分布の 95% 点の値を  $\chi^2(0.95, m)$  で示すと、パラメータ  $\Theta$  の 95% 同時信頼区間は

$$2 \ln \left( \frac{L(\hat{\Theta})}{L(\Theta)} \right) \leq \chi^2(0.95, m) \quad (2.12)$$

を満たす領域として得られる。ある一つのパラメータ  $\theta_1$  についての信頼区間は

$$2 \ln \left( \frac{L(\hat{\Theta})}{L(\Theta_1)} \right) \leq \chi^2(0.95, 1) \quad (2.13)$$

ここで

$$\Theta_1 = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_{i-1}, \theta_1, \hat{\theta}_{i+1}, \dots, \hat{\theta}_m) \quad (2.14)$$

により得られる。この計算は複雑になるため、Fisher 情報量行列による方法が用いられることが多い。

### (3) Bootstrap 法

Bootstrap 法は、リサンプリングにより推定値の精度や偏りを求める方法である (Efron, 1982)。得られた  $n$  個のデータから重複して  $n$  個を抽出し、推定値を求める。これを繰り返し、得られた推定値の分布から推定値の精度や偏りを求める。Bootstrap 法は分布形を仮定する必要のないノンパラメトリックな方法であり、非常に複雑な推定量の評価も可能である。計算量が膨大になるが、計算機の発達に伴って最近広く用いられている。

## II-2 尤度構成の基本となる確率分布

後述するように、最小 2 乗法はデータのばらつき方として正規分布を仮定したモデルを最尤法で解いたものとみることができる。最小 2 乗法ではデータのばらつき方として正規分布のみが仮定されるが、最尤法では様々なモデルが使用可能となる。適切な推定を行うためには、与えられたデータがどのような確率分布に従っているか、あるいはどのような確率分布でうまく近似的に表現できるかを見極めることが重要となる。下記に第三章以降で用いられる確率分布および一般によく使われる確率分布をまとめておく。

### (1) 2 項分布

一回の試行である事象が起こる確率を  $p$  とする。  $N$  回の試行を独立に繰り返した時、その事象が  $y$  回起こる確率は次の 2 項分布で表わされる。

$$P(y) = \frac{N!}{(N-y)! y!} p^y (1-p)^{N-y} \quad (2.15)$$

2 項分布の平均は  $Np$ 、分散は  $Np(1-p)$  である。ランダムに分布している  $N$  尾の魚を確率  $p$  で漁獲したとすると、  $y$  尾が漁獲される確率は上記の 2 項分布で表わされる。単純ランダムサンプリングによる偶然変動はこのように 2 項分布で表現できる場合が多い。

## (2)多項分布

1回の試行でn種の排反事象がそれぞれ確率 $p_1, \dots, p_n$ で起こるとする。N回の試行を独立に繰り返した時、それぞれの事象が $y_1, \dots, y_n$ 回起こる確率は次の多項分布で表わされる。

$$P(Y) = \frac{N!}{\prod y_i!} \prod_{i=1}^n p_i^{y_i}. \quad (2.16)$$

多項分布では $y_i$ の平均値は $N p_i$ 、分散は $N p_i (1 - p_i)$ 、 $y_i$ と $y_j$ の共分散は $-N p_i p_j$ である。観測値がn個の級に分類され、ある観測値がある階級 $i$ に入る確率を $p_i$ 、観測度数を $y_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )とすると、 $y_1, \dots, y_n$ が得られる確率は上記のような多項分布になる。例えばある年級群を考え、第 $i$ 年目に漁獲される確率を $p_i$ とすれば、漁獲尾数 $y_1, \dots, y_n$ が得られる確率は多項分布になる。多項分布もサンプリングによる確率変動を表わすためによく用いられる。

## (3)正規分布

平均 $\mu$ 、分散 $\sigma^2$ の正規分布は次の式で表わされる。

$$f(y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \sigma} \exp \left\{ -\frac{(y - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}. \quad (2.17)$$

中心極限定理により、確率変数の和は漸近的に正規分布に近づくことが知られている。従って幾つかの確率変数の和であるような変動は、正規分布でよく近似される。

## (4)多変量正規分布

多変量正規分布は上述の正規分布を多変数の場合に拡張したものである。平均 $\mu$ 、分散共分散 $\Omega$ の多変量正規分布は次式で与えられる。

$$f(Y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Omega|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (Y - \mu) \Omega^{-1} (Y - \mu)^t \right\}. \quad (2.18)$$

ここで $Y \equiv (y_1, y_2, \dots, y_n)$ である。

## (5)2項分布の正規近似

(2.15)式の2項分布は、 $N \rightarrow \infty$ の条件下で次のような正規分布となる。

$$f(Y) = \frac{1}{\{2\pi N p(1-p)\}^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{(y - Np)^2}{2Np(1-p)} \right\}. \quad (2.19)$$

$p \leq 0.5$ のとき $Np \geq 5$ 、 $p > 0.5$ のとき $Np(1-p) \geq 5$ の条件を満たしていれば、2項分布は上記の正規分布で十分良く近似されることが知られている。2項分布のままでは計算や検定が困難である場合が多いので、この近似式もよく使われる。

## (6)多項分布の正規近似

(2.16)式の大項分布は、 $N \rightarrow \infty$ の条件下で次のような多変量正規分布となる (竹内, 1989)。

$$f(Y) = \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2} |P|^{1/2}} \exp \left\{ -(Y - NP) P^{-1} (Y - NP)^t \right\} \quad (2.20)$$

ここで、 $P = (p_1, \dots, p_{n-1})$

$$\Omega = \begin{bmatrix} N p_1 (1 - p_1) \cdots - N p_1 p_{n-1} & & & \\ - N p_2 p_1 & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & - N p_{n-2} p_{n-1} \\ - N p_{n-1} p_1 & \cdots & N p_{n-1} (1 - p_{n-1}) & \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

である。n = 2 の場合は、(2.19) 式の 2 項分布の正規近似に一致する。

これはさらに

$$f(Y) = \frac{1}{(2\pi N)^{(n-1)/2} \{\prod p_i (1 - \sum p_i)\}^{1/2}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(y_i - N p_i)^2}{N p_i} - \frac{(\sum y_i - N \sum p_i)^2}{2 N (1 - \sum p_i)} \right\} \quad (2.22)$$

と変形することができる (付録参照)。計算はこの形の方が楽である。

さらに (2.21) 式で

$$\min \{p_i\} \gg \max \{p_i p_j\} \quad (2.23)$$

の時、 $p_i p_j \approx 0$  と近似すると

$$\Omega = \begin{bmatrix} N p_1 & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & N p_{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

よって

$$f(Y) = \frac{1}{(2\pi N)^{(n-1)/2} (\prod p_i)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(y_i - N p_i)^2}{N p_i} \right\} \quad (2.25)$$

となる。

2 項分布・多項分布では N! の計算が必要となるため、N が大きい場合は計算時間がかかるが、正規近似の式を利用すれば計算は容易となる。これらの近似式は 2 項分布・多項分布と正規分布の関係をみる上でも重要である。正規分布では分散は独立で一定のパラメータであるが、2 項分布では  $N p (1 - p)$  で決定され独立なパラメータではない。さらに多項分布では  $N p_i (1 - p_i)$  (または  $p_i p_j \approx 0$  の近似のもとで  $N p_i$ ) となり  $p_i$  により値が変化する。

2 項分布・多項分布は単純ランダムサンプリングの場合の偶然変動を表現する式である。現実のデータには測定誤差やモデルの前提条件からの外れによる影響などが含まれ、分散が大きくなることが予想される。そこで 2 項分布・多項分布の正規近似分布にさらにばらつきの大きさのパラメータ  $\sigma^2$  を導入して、次のようなモデルを考えることができる。2 項分布に対しては (2.19) 式より

$$f(Y) = \frac{1}{\{2\pi N p (1 - p) \sigma^2\}^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{(y - N p)^2}{2 N p (1 - p) \sigma^2} \right\}. \quad (2.26)$$

多項分布に対しては (2.22) 式より

$$f(Y) = \frac{1}{(2\pi N\sigma^2)^{(n-1)/2} \{\prod p_i (1 - \sum p_i)\}^{1/2}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(y_i - N p_i)^2}{N p_i \sigma^2} - \frac{(\sum y_i - N \sum p_i)^2}{2 N (1 - \sum p_i) \sigma^2} \right\}. \quad (2.27)$$

あるいは(2.25)式より

$$f(Y) = \frac{1}{(2\pi N\sigma^2)^{(n-1)/2} (\prod p_i)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(y_i - N p_i)^2}{N p_i \sigma^2} \right\} \quad (2.28)$$

となる。第V章と第VI章の解析ではこれらのモデルも使われる。

本研究では用いなかったが、以下の2つの分布は重要であるので挙げておく。

#### (7)ポアソン分布

平均 $\mu$ のポアソン分布は次の式で表わされる。

$$P(y) = \frac{\mu^y}{y!} \exp(-\mu). \quad (2.29)$$

$y$ の分散は平均と等しく $\mu$ になる。ポアソン分布は事象が起こりにくい場合、すなわち $y$ が小さい場合に使われる。

#### (8)負の2項分布

平均 $\mu$ 、分散 $\mu + \mu^2/k$ の負の2項分布は次のようになる。

$$P(y) = \frac{(k+y-1)!}{y! (k-1)!} \left(\frac{k}{k+\mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{k+\mu}\right)^y. \quad (2.30)$$

$k$ は分散の大きさを表わすパラメータである。負の2項分布はポアソン分布よりばらつきが大きい場合に使われる。動物のように単純ランダムではなく、集中的に分布しているものを表現することができる。

### II-3 最尤法の一般的な性質

#### II-3-1 最尤推定量の性質

最尤推定量の統計学的な性質としては、次のようなことが知られている(蓑谷, 1988)。

- ①一致性: サンプルサイズが大きくなると真の値に収束する。
- ②漸近有効性: サンプルサイズが大きくなると不偏推定量のなかで分散が最小となる。
- ③漸近不偏性: サンプルサイズが大きくなると偏りがなくなる。

このような性質から、推定量として最尤推定量が望ましいとされている。①~③はサンプルサイズが大きい場合の性質であり、小さい場合には問題が生じることがある。例えば、有限のサンプルサイズでは最尤推定量は必ずしも不偏推定量となっておらず、使用にあたっては十分な注意が必要となる。

#### II-3-2 最小2乗法との関係

最小2乗法ではデータが理論式のまわりに正規分布でばらついていると仮定されている。例えば、線形最小2乗法であれば

$$y_i = a x_i + b + \epsilon_i \quad \epsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \quad (2.31)$$

ここで $\epsilon_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )は互に独立と仮定される。これはひとつのデータ発生モデルを表わしているわけであるから、このモデルを尤度関数の形で表わすと

$$L(a, b, \sigma^2 | X_1, \dots, X_n, y_1, \dots, y_n) \\ = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \prod_{i=1}^n \exp \left\{ -\frac{(y_i - a x_i - b)^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (2.32)$$

となる。これを最大にする  $a$  と  $b$  を求めることと、最小 2 乗法において残差平方和を最小にする  $a$  と  $b$  を求めることは同等である。従って、最小 2 乗法は最尤法のデータ発生確率モデルを正規分布に限った場合とみなすことができる。分散  $\sigma^2$  に関してのみ、最尤推定量は

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{a} x_i - \hat{b})^2 \quad (2.33)$$

となるが、最小 2 乗法では偏りを修正した

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{(n-2)} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{a} x_i - \hat{b})^2 \quad (2.34)$$

を用いるため結果が多少異なることがある。

非線形最小 2 乗法の場合も全く同様で、残差平方和を最小にするパラメータを推定することと、(2.32) 式に対応する尤度関数を最大とするパラメータを求めることは同等である。

最尤法と最小 2 乗法の比較については、III 章以降の実際のデータ解析の中でも具体的に述べ、さらに第七章で整理する。

#### II-4 使用した最適化プログラム

最尤法による推定では尤度関数の極大値を求める必要がある。多くの場合これは解析的には求まらず、数値的に求めることになる。これに対して、さまざまな非線形最適化法のアルゴリズムが考案されており、それぞれ特色をもっている。

本研究では、奥村(1986)のシンプレックス法最適化プログラムSMPLXを使用した。シンプレックス法は試行錯誤的に目的関数の最小値(極値)を求めるもので、収束は遅いが、アルゴリズム自体が簡単であるので、比較的扱いやすい方法である。目的関数の微分を必要としないので、目的関数のみをサブルーチンとして与えるだけで計算可能であり、プログラムも容易に作成できる。

使用にあたっては、SMPLXにFisher情報量行列を数値的に求めるサブルーチンを付け加え、推定値の標準誤差と相関係数も計算できるように改良した。その結果、目的関数(この場合は対数尤度)をサブルーチンの形で入れてやれば、最大対数尤度およびその時のパラメータの値(最尤推定値)、さらに標準誤差と相関係数が計算される。

非線形最適化プログラムで得られるのはあくまで極値であり、複数の極値をもつ場合には求めたい推定値でない場合がある。このため本研究の計算では、初期値を試行錯誤的に変えることにより、最尤推定値の信頼性を十分に検討した。

### 第三章 再生産式の推定

#### III-1 はじめに

再生産関係を知ることは適切な資源管理を行うために重要である。このため従来から再生産関係を表わす様々な関係式が考えられており、特にBeverton-Holt型、Ricker型の再生産曲線は代表的なものである。Beverton-Holt型再生産曲線はEを親の量、Rを子の量として

$$R = \frac{\alpha E}{1 + \beta E} \quad (3.1)$$

で表わされる。ここで $\alpha$ と $\beta$ は曲線のパラメータである。この式の特徴は $E$ が大きくなると、 $R$ が $\alpha/\beta$ に漸近することである。Ricker型再生産曲線は

$$R = \alpha E \exp(-\beta E) \quad (3.2)$$

で表わされる。Ricker型の特徴は $R$ を最大とする $E$ の値が存在し、 $E$ がそれより大きくなると $R$ が減少することである。

親仔関係のデータから再生産曲線を推定するためには、従来はこれらの式をパラメータについて線形になるよう変形し、線形回帰により求めていた。非線形最適化プログラムを用いれば、例えば(3.1)式や(3.2)式の形のままでパラメータ推定をすることも可能である(赤嶺, 1986)。本章では、従来用いられてきた推定方法を再検討し、正規分布や対数正規分布を仮定した新しいモデルと比較精査する。

### III-2 再生産式の推定とモデル比較

例としてBeverton-Holt型およびRicker型の再生産曲線を取り挙げる。従来の線形回帰に相当するモデルと共に、非線形のまま扱うモデルも考える。さらに $R$ と $E$ が無関係であるようなモデルもあわせて検討し、適切な再生産関係を推定する。

#### III-2-1 尤度関数の導出

##### (1) Beverton-Holt型再生産曲線の尤度

Beverton-Holt型の再生産曲線(3.1)式を未知パラメータについて線形に変形する方法として、従来から次のような2種類の方法が用いられてきた(田中, 1985)。第1は(3.1)式の逆数を取り

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\alpha} \left( \beta + \frac{1}{E} \right) \quad (3.3)$$

として $1/R$ の $1/E$ に対する回帰直線を考え、その係数から $\alpha$ と $\beta$ を求める方法である。第2は(3.3)式の両辺にさらに $E$ を掛けて

$$\frac{E}{R} = \frac{1}{\alpha} (1 + \beta E) \quad (3.4)$$

として $E/R$ の $E$ に対する回帰を考える方法である。両者間では想定しているデータ発生モデルが異なっている。得られた親仔関係のデータを $E_i$ と $R_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) とすると、第1の方法は

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{\alpha} \left( \beta + \frac{1}{E_i} \right) + \varepsilon_i \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \quad (3.5)$$

第2の方法は

$$\frac{E_i}{R_i} = \frac{1}{\alpha} (1 + \beta E_i) + \varepsilon_i \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \quad (3.6)$$

いずれも $\varepsilon_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) は互に独立、というモデルを想定している。これを確率密度関数で表わすとそれぞれ

$$\begin{aligned} f(1/R_1, \dots, 1/R_n) \\ = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \prod_{i=1}^n \exp \left[ -\frac{\{1/R_i - (\beta + 1/E_i)/\alpha\}^2}{2\sigma^2} \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$



$$f(E_1/R_1, \dots, E_n/R_n) \\ = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \prod_{i=1}^n \exp\left[-\frac{\{E_i/R_i - (1+\beta E_i)/\alpha\}^2}{2\sigma^2}\right] \quad (3.8)$$

となる。これらはそれぞれ  $1/R$  と  $E/R$  に対するデータ発生確率となっているため、次のように  $R$  に対するデータ発生確率の形に統一しておいた方が、モデル比較などを行う場合に都合が良い。

$$f(1/R) d(1/R) \rightarrow f(R) \frac{1}{R^2} dR \quad (3.9)$$

$$f(E/R) d(E/R) \rightarrow f(R) \frac{E}{R^2} dR. \quad (3.10)$$

従って尤度関数は、第1のモデルでは

$$L(\alpha, \beta, \sigma^2 | E_1, \dots, E_n, R_1, \dots, R_n) \\ = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{R_i^2} \exp\left[-\frac{\{1/R_i - (\beta + 1/E_i)/\alpha\}^2}{2\sigma^2}\right] \quad (3.11)$$

また第2のモデルでは

$$L(\alpha, \beta, \sigma^2 | E_1, \dots, E_n, R_1, \dots, R_n) \\ = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \prod_{i=1}^n \frac{E_i}{R_i^2} \exp\left[-\frac{\{E_i/R_i - (1+\beta E_i)/\alpha\}^2}{2\sigma^2}\right] \quad (3.12)$$

となる。

これら以外にも、(3.1)式のまわりに  $R_i$  が正規分布するというモデルや、対数正規分布するというものも有力なモデルとして考えることができる。すなわち

$$R_i = \frac{\alpha E_i}{1 + \beta E_i} + \varepsilon_i \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \quad (3.13)$$

$$\ln(R_i) = \ln\left(\frac{\alpha E_i}{1 + \beta E_i}\right) + \varepsilon_i \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \quad (3.14)$$

いずれも  $\varepsilon_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) は互に独立。これらの尤度関数はそれぞれ

$$L(\alpha, \beta, \sigma^2 | E_1, \dots, E_n, R_1, \dots, R_n) \\ = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \prod_{i=1}^n \exp\left[-\frac{\{R_i - \alpha E_i / (1 + \beta E_i)\}^2}{2\sigma^2}\right] \quad (3.15)$$

$$L(\alpha, \beta, \sigma^2 | E_1, \dots, E_n, R_1, \dots, R_n) \\ = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \exp\left(-\frac{[\ln(R_i) - \ln\{\alpha E_i / (1 + \beta E_i)\}]^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.16)$$

となる。(3.16)式で  $1/R_i$  の項が付くのは(3.9)式と(3.10)式と同様

$$f(\ln(R)) d(\ln(R)) \rightarrow f(R) \frac{1}{R} dR \quad (3.17)$$

による。後者2つのモデルはパラメータについて非線形となっているため、従来は用いられることがなかった。

### (2) Ricker型再生産曲線の尤度

Ricker型再生産曲線(3.2)式のまわりに $R_i$ が正規分布するというモデルと、対数正規分布するというモデルを考える。すなわち

$$R_i = \alpha E_i \exp(-\beta E_i) + \varepsilon_i \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \quad (3.18)$$

$$\ln(R_i) = \ln\{\alpha E_i \exp(-\beta E_i)\} + \varepsilon_i \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \quad (3.19)$$

いずれも $\varepsilon_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )は互に独立。これらを尤度関数で表わすとそれぞれ

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta, \sigma^2 \mid E_1, \dots, E_n, R_1, \dots, R_n) \\ = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \prod_{i=1}^n \exp\left[-\frac{\{R_i - \alpha E_i \exp(-\beta E_i)\}^2}{2\sigma^2}\right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta, \sigma^2 \mid E_1, \dots, E_n, R_1, \dots, R_n) \\ = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \exp\left(-\frac{[\ln(R_i) - \ln\{\alpha E_i \exp(-\beta E_i)\}]^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

となる。(3.21)式で $1/R_i$ の項が付くのは(3.16)式と同様の理由による。(3.19)式は変形すると

$$\ln(R_i/E_i) = \ln(\alpha) - \beta E_i + \varepsilon_i \quad (3.22)$$

となり、 $\ln(R_i/E_i)$ の $E_i$ に対する回帰式によりパラメータを推定することができる。このため従来はRicker型再生産曲線といえば、この対数正規分布に対応するモデルのみが示されてきた。

### (3) 親子関係が無い場合の尤度

一般に親子関係を示すデータは非常にばらつきが大きく、 $R$ と $E$ の間に関数関係が存在するかどうかも明らかでないことがある。そこで次のように $R$ が $E$ にかかわらず一定であるモデルを考える。

$$R_i = \alpha + \varepsilon_i \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \quad (3.23)$$

$$\ln(R_i) = \ln(\alpha) + \varepsilon_i \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \quad (3.24)$$

いずれも $\varepsilon_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )は互に独立。これらを尤度関数で表わすとそれぞれ

$$L(\alpha, \sigma^2 \mid R_1, \dots, R_n) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \prod_{i=1}^n \exp\left\{-\frac{(R_i - \alpha)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} L(\alpha, \sigma^2 \mid R_1, \dots, R_n) \\ = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \exp\left\{-\frac{(\ln(R_i) - \ln(\alpha))^2}{2\sigma^2}\right\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

となる。

以下の解析では、(3.11) 式をBeverton型  $1/R-1/E$  回帰モデル、(3.12) 式をBeverton型  $E/R-1/E$  回帰モデル、(3.15) 式をBeverton型正規分布モデル、(3.16) 式をBeverton型対数正規モデル、(3.20) 式をRicker型正規分布モデル、(3.21) 式をRicker型対数正規モデル、(3.25) 式を無関係正規分布モデル、(3.26) 式を無関係対数正規モデルと呼ぶ。

### III-2-2 モデル比較

田口 (1965 a) における Table 2 の中央アラスカの奇数年カラフトマス、および田口 (1965 b) における Table 1 の中央アラスカのシロザケの親仔関係データ (表 1, 図 1, 図 2) から、III-2-1 で述べた 8 種類のモデルを用いて再生産式を推定した。

得られた結果を表 2 に示す。カラフトマスではRicker型正規分布モデルのAICが最も小さく、Beverton型正規分布モデルも大差無い。シロザケでは、無関係対数正規モデルが最適となり、以下無関係正規分布とBeverton型対数正規がAICの1以内の差に位置する。

推定された再生産式のうち、カラフトマスではBeverton型の4種類とRicker型の2種類のモデル、シロザケでは無関係対数正規とBeverton型対数正規を、それぞれ図 1 および図 2 に示す。図 1 b のRicker型曲線では、モデルから得られるデータの分布の95%区間も点線で示した。

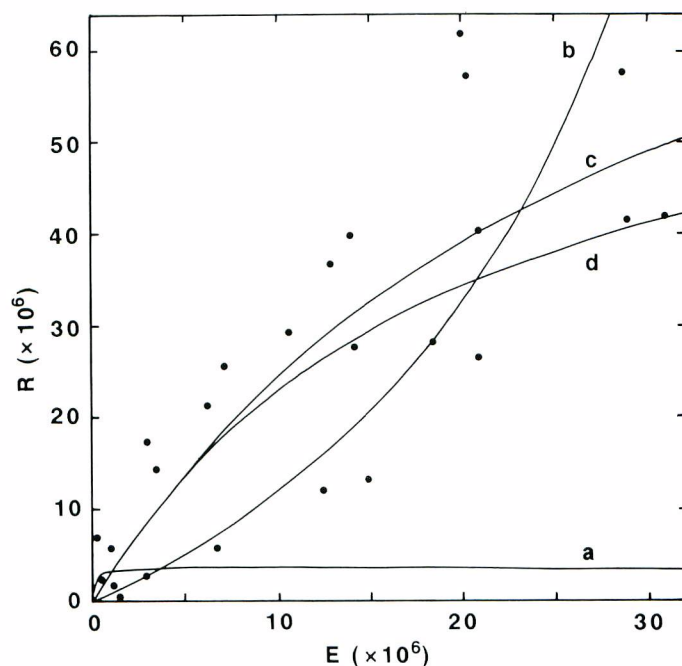


Fig. 1a. Stock and recruitment data for pink salmon and fitted Beverton-Holt stock-recruitment curves.

- a:  $1/R-1/E$  regression model    b:  $E/R-E$  regression model  
 c: Normal distribution model    d: Log-normal model

## III-3 議論

## (1)式変形によるモデルの差異

図1 aから明らかなように、解析例に使用したカラフトマスデータのデータでは、同じBeverton-Holt型再生産曲線であっても、推定方法の違いにより非常に異なった曲線が得られた。(3.1)式を、(3.3)式や(3.4)式に変形してからパラメータを推定することは、単なる計算の便宜上のためだけではない。(3.11)、(3.12)、(3.15)、(3.16)各式の尤度関数を比較すれば明らかなように、式変形によって想定しているデータ発生モデルも変化している。このためパラメータの推定値が大きく異なり、モデルのあてはまりにも大きな差異が生じた。式変形によるモデルの違いについては意識されていない場合が多いが、結果に無視できない差を産み出すこともあり得る。

また図1 bにみられるように、推定された曲線に大差が無くとも、モデルで想定しているデータのばらつき方が非常に異なり、予測区間の推定に際して大きな差を生じることがある。この場合には正規分布モデルの方が適切なことは明らかであるが、それがAICの値にも反映されている。

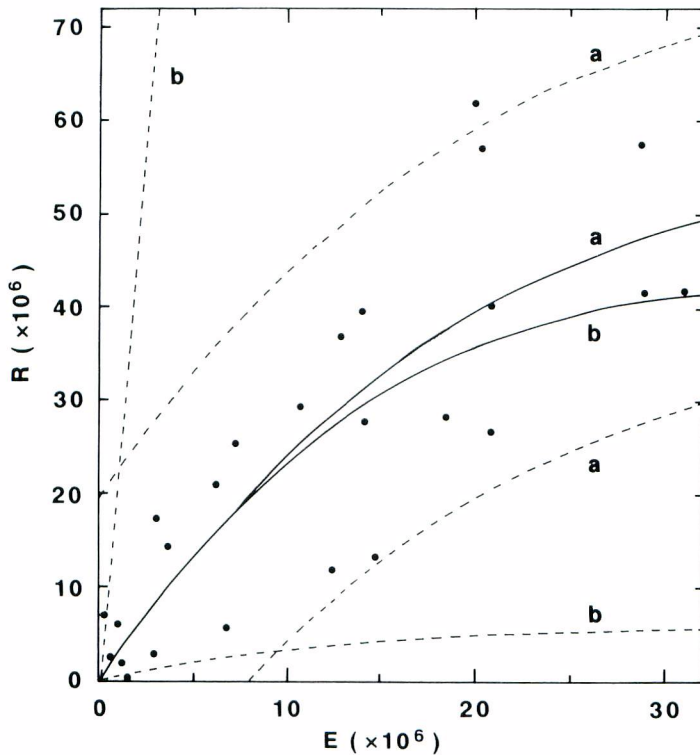


Fig. 1b. Stock and recruitment data for pink salmon and fitted Ricker stock-recruitment curves.  
Dotted lines indicate 95% confidence intervals of data distribution.  
a : Normal distribution model  
b : Log-normal model

**Table 1.** Stock and recruitment data.

(A) Pink salmon (Taguchi, 1965a)

Year	Parental stock	Recruitment	Year	Parental stock	Recruitment
1911	0.5	2.2	1937	31.0	41.8
1913	1.1	1.8	1939	20.9	40.4
1915	0.9	5.8	1941	20.2	57.2
1917	2.9	2.8	1943	28.6	57.6
1919	1.4	0.2	1945	28.8	41.6
1921	0.1	7.0	1947	20.8	26.6
1923	3.5	14.2	1949	13.3	12.2
1925	7.1	25.6	1951	6.1	21.2
1927	12.8	36.8	1953	10.6	29.4
1929	18.4	28.2	1955	14.7	13.2
1931	14.1	27.8	1957	6.6	6.0
1933	13.9	39.8	1959	3.0	17.4
1935	19.9	62.0			

Unit : million of fish.

(B) Chum salmon (Taguchi, 1965b)

Year	Parental stock	Recruitment	Year	Parental stock	Recruitment
1920	1.5	4.0	1939	2.7	4.4
1921	0.4	4.4	1940	3.7	6.2
1922	0.9	6.4	1941	3.5	7.8
1923	0.9	5.0	1942	4.2	6.2
1924	2.0	7.6	1943	2.2	5.2
1925	2.2	10.2	1944	3.1	6.8
1926	3.2	5.6	1945	3.9	5.0
1927	2.5	4.4	1946	3.1	5.0
1928	3.8	3.0	1947	2.6	4.0
1929	5.1	4.4	1948	3.4	7.0
1930	2.8	6.2	1949	2.5	6.2
1931	2.2	6.8	1950	2.5	6.6
1932	1.5	6.6	1951	2.0	3.2
1933	2.2	4.6	1952	3.5	7.4
1934	3.1	5.4	1953	3.1	8.8
1935	3.4	5.4	1954	3.3	6.4
1936	3.3	7.4	1955	1.6	3.8
1937	2.3	7.0	1956	3.7	7.4
1938	2.7	8.4	1957	4.4	4.2

Unit : million of fish.

**Table 2.** Parameter estimates and AIC values for eight models.

Numbers in parentheses are standard errors.

(A) Pink salmon

Model	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\sigma}^2$	AIC
Beverton-Holt curve	55.5	16.1	0.938	344.08
1/R-1/E regression	(305.6)	(92.8)	(0.265)	
Beverton-Holt curve	0.966	$-2.06 \times 10^{-2}$	1.67	264.47
E/R-E regression	(0.391)	( $2.06 \times 10^{-2}$ )	(0.47)	
Beverton-Holt curve	3.24	$3.31 \times 10^{-2}$	102	192.55
Normal distribution	(0.97)	( $2.45 \times 10^{-2}$ )	(29)	
Beverton-Holt curve	3.46	$5.08 \times 10^{-2}$	1.01	211.64
Log-normal	(1.44)	( $5.71 \times 10^{-2}$ )	(0.29)	
Ricker curve	2.96	$2.04 \times 10^{-2}$	102	192.49
Normal distribution	(0.62)	( $0.95 \times 10^{-2}$ )	(28)	
Ricker curve	3.11	$2.72 \times 10^{-2}$	1.02	211.88
Log-normal	(1.02)	( $2.15 \times 10^{-2}$ )	(0.29)	
No relation	24.8	—	334	220.29
Normal distribution	(3.7)		(95)	
No relation	14.7	—	1.78	223.70
Log-normal	(3.9)		(0.50)	

(B) Chum salmon

Model	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\sigma}^2$	AIC
Beverton-Holt curve	49.0	8.50	$2.77 \times 10^{-3}$	154.23
1/R-1/E regression	(52.7)	(9.65)	( $0.63 \times 10^{-3}$ )	
Beverton-Holt curve	-30.1	-5.84	$2.43 \times 10^{-2}$	166.49
E/R-E regression	(68.2)	(12.49)	( $0.56 \times 10^{-2}$ )	
Beverton-Holt curve	42.1	6.68	2.47	148.20
Normal distribution	(46.5)	(7.84)	(0.57)	
Beverton-Holt curve	43.7	7.23	$7.52 \times 10^{-2}$	147.64
Log-normal	(45.5)	(7.98)	( $1.73 \times 10^{-2}$ )	
Ricker curve	6.95	0.401	2.51	148.86
Normal distribution	(1.08)	(0.053)	(0.58)	
Ricker curve	7.64	0.441	$8.46 \times 10^{-2}$	152.07
Log-normal	(1.07)	(0.048)	( $1.94 \times 10^{-2}$ )	
No relation	5.91	—	2.54	147.33
Normal distribution	(0.26)		(0.58)	
No relation	5.69	—	$7.74 \times 10^{-2}$	146.72
Log-normal	(0.26)		( $1.78 \times 10^{-2}$ )	

この例では線形回帰による推定に相当する、Beverton型  $1/R - 1/E$  回帰および  $E/R - E$  回帰、Ricker型対数正規の各モデルはいずれもあてはまりが悪い。これらのモデルでは計算の容易さが最優先されているが、本解析例は計算の容易なモデルが必ずしも適切なモデルとなっていないことを示している。誤った再生産関係式を使うと、漁業管理や種苗放流計画への影響が大きいため慎重な解析が必要である。

## (2)再生産関係の存在の判定

シロザケではRがEによらず一定とするモデルが最適となった。Beverton型対数正規モデルのAICも1程度の差しかないが、図2から明らかなように、このモデルでもデータに対応するEの範囲ではRはほとんど一定といえよう。従って、再生産の量的関係はこのデータからは解析できないと判断すべきである。

田口 (1965 b) はこのデータに対し、 $\ln(R/E)$  とEの回帰を考えることにより相関係数 0.85 を得、Ricker型の再生産曲線を推定している。線形回帰によりRicker型の曲線を推定する場合、EにかかわらずRが一定であっても回帰係数が統計学的に有意になることが知られているが(田中, 1985)、田口の解析結果もこれに該当すると考えられる。

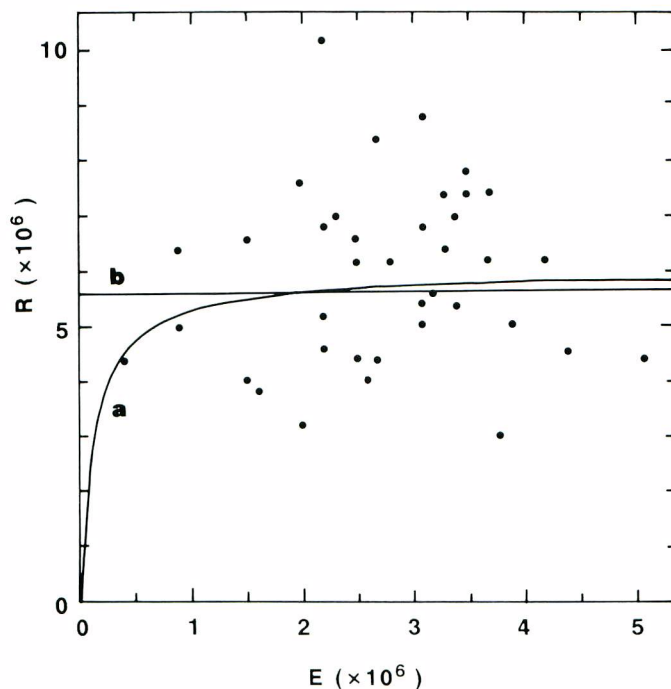


Fig. 2. Stock and recruitment data for chum salmon and fitted stock-recruitment curves.

- a: Beverton-Holt curve, log-normal model
- b: No relation, log-normal model

前節でも述べたように親子関係を示すデータは非常にばらつきの大きいものが多いが、本研究で示したような無関係モデルもあわせて導入することにより、見かけ上の相関に惑わされることなく、再生産関係の存在の有無を判断することが可能となる。

### (3)モデルの拡張性

本研究ではBeverton-Holt型およびRicker型の再生産曲線のみを扱ったが、再生産曲線としては、これらよりパラメータの増えたCushing型 (Cushing, 1973) や、Shepherd型 (Shepherd, 1982) など、さまざまなものが考えられている。AICを用いればこれらパラメータ数の異なるモデルも含めて、統一的にモデル比較を行うことが可能である。

## 第IV章 網目選択曲線の推定

### IV-1 はじめに

ある漁具が漁獲しやすい魚の大きさ、すなわち漁具の(体長サイズの)選択性を知ることは、資源評価と漁業管理の上で重要である。底曳網では、魚の体長が大きくなるにしたがって網内にとどまる割合が高くなることが知られている(能勢ほか, 1988)。この網目選択性を推定する方法のひとつに、対象とする袋網の外側を目合の小さい網でおお「おおい網試験」がある。対象としている網に漁獲された魚の数と、網から脱落下しておおい網で漁獲された数から、各体長ごとの網にとどまる割合すなわち選択率を計算することができる。網口に入る魚の数は体長によって大きな差があるため、体長ごとにデータのばらつき方が異なり、正しい選択曲線を推定することは困難であった。ここでは網への漁獲尾数を2項分布として取り扱い、最尤法を用いてデータのばらつき方の違いを考慮した選択曲線の推定を行う。選択曲線を体長と目合の関数とする仮定の妥当性についても検討を加える。

### IV-2 網目選択曲線の推定とモデル比較

おおい網試験で得られるのは、各体長ごとの網に残った魚と網から脱落下した魚の尾数である。これから各体長の選択率が

$$\frac{\text{網に残った尾数}}{\text{網に残った尾数} + \text{網から脱落下した尾数}}$$

で得られる。これから網目選択曲線を推定するには、適切な確率変動を考慮に入れる必要がある。各体長のばらつきは、その体長のデータ数(網に残った尾数と脱落下した尾数の合計)に依存するため単純ではない。このため従来の曲線はフリーハンドで引かれたり、平滑化の手法により推定されることが多かった。ここでは、最尤法によりデータの発生状況を考えることにより、データのばらつきを自動的にとりにくく推定を行う。

#### IV-2-1 網目選択曲線の推定方法

対象とする魚の体長がすべて同一の場合を考える。このとき個々の魚について網で漁獲される確率をP、網から脱落下する確率を1-Pとする。N尾が網口に入りそのうちC尾のみが漁獲される確率は2項分布となり

$$\frac{N!}{(N-C)! C!} P^C (1-P)^{N-C} \quad (4.1)$$

で表わされる。



様々な体長階級の魚が漁獲される場合を次に考える。体長  $L$  ( $L = L_1, \dots, L_n$ ) の魚が漁獲される確率を  $P_L$  とする。各体長ごとに  $N_L$  尾が網口に入り、 $C_L$  尾が漁獲される確率は、それぞれの 2 項分布の積となり

$$\prod_{L=L_1}^{L_n} \frac{N_L!}{(N_L - C_L)! C_L!} P_L^{C_L} (1 - P_L)^{N_L - C_L} \quad (4.2)$$

で表わされる。選択率はごく小さな体長で 0、大きな体長で 1 となりおおよそシグモイド型の曲線になると考えられている。網目選択曲線  $\phi(L)$  として、シグモイド曲線

$$\phi(L) = \frac{1}{1 + \exp(a - bL)} \quad (4.3)$$

を仮定すれば、尤度関数は

$$\begin{aligned} L(a, b \mid C_{L_1}, \dots, C_{L_n}, N_{L_1}, \dots, N_{L_n}) \\ = \prod_{L=L_1}^{L_n} \frac{N_L!}{(N_L - C_L)! C_L!} \phi(L)^{C_L} (1 - \phi(L))^{N_L - C_L} \end{aligned} \quad (4.4)$$

と導かれる。ここで  $a$  と  $b$  はシグモイド曲線のパラメータである。与えられたデータの下で、(4.4) 式の尤度関数を最大とする  $a$  と  $b$  を求めることにより選択曲線が推定される。

#### IV-2-2 モデル比較

解析例として、Margetts (1954) によるウシノシタのおおい網試験の結果を用いて網目選択曲線を推定する (表 3)。Margetts は 67.4 mm, 73.7 mm, 86.5 mm の 3 種類の目合を用いている。いずれの目合の選択率もシグモイド曲線に近い形になることが予想されるので、選択曲線としてはシグモイド型と、これにさらにパラメータ  $c$  を増やしたシグモイド拡張型の 2 種類の曲線を考える。

モデル①：シグモイド型

$$\phi(L) = \frac{1}{1 + \exp(a - bL)} \quad (4.5)$$

モデル②：シグモイド拡張型

$$\phi(L) = \frac{1}{1 + \exp(a - bL^c)} \quad (4.6)$$

モデル①は  $\phi(L) = 0.5$  を中心に対称な曲線となるが、モデル②は非対称な場合も表現することができる。

それぞれの尤度関数の具体的な形は、(4.4) 式に (4.5) 式と (4.6) 式を代入して

$$\begin{aligned} L(a, b \mid C_{L_1}, \dots, C_{L_n}, N_{L_1}, \dots, N_{L_n}) &= \prod_{L=L_1}^{L_n} \frac{N_L!}{(N_L - C_L)! C_L!} \\ &\times \left\{ \frac{1}{1 + \exp(a - bL)} \right\}^{C_L} \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \exp(a - bL)} \right\}^{N_L - C_L} \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} L(a, b, c \mid C_{L_1}, \dots, C_{L_n}, N_{L_1}, \dots, N_{L_n}) &= \prod_{L=L_1}^{L_n} \frac{N_L!}{(N_L - C_L)! C_L!} \\ &\times \left\{ \frac{1}{1 + \exp(a - bL^c)} \right\}^{C_L} \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \exp(a - bL^c)} \right\}^{N_L - C_L} \end{aligned} \quad (4.8)$$

となる。

**Table 3.** Overall length distribution of soles caught in cod-end and in cod-end cover netting (Margetts, 1954)

Overall length (cm)	Mesh-size					
	67.4mm		73.7mm		86.5mm	
	Cod-end	Cover	Cod-end	Cover	Cod-end	Cover
6	0	0	0	3	0	0
7	0	1	0	2	0	0
8	0	1	0	2	0	1
9	0	0	0	4	0	0
10	0	1	0	5	0	2
11	0	1	0	9	0	5
12	0	9	0	69	0	17
13	0	19	1	135	1	29
14	2	25	8	151	0	45
15	0	19	7	114	1	36
16	0	16	6	46	1	8
17	0	5	1	19	0	9
18	0	3	2	15	0	11
19	4	8	1	28	2	22
20	9	10	7	73	0	27
21	16	11	10	68	2	61
22	49	14	43	114	5	96
23	47	4	93	110	5	99
24	60	3	125	69	6	99
25	56	0	176	34	10	83
26	55	0	139	14	7	67
27	53	0	122	3	15	74
28	47	0	139	1	25	74
29	33	0	89	2	34	51
30	35	0	103	0	51	27
31	25	0	83	0	51	13
32	21	0	79	0	67	6
33	19	0	55	0	53	3
34	19	0	57	0	36	0
35	10	0	30	0	34	1
36	8	0	20	0	14	0
37	5	0	10	0	10	0
38	4	0	11	0	7	0
39	2	0	6	0	7	0
40	2	0	7	0	3	0
41	0	0	6	0	4	0
42	2	0	3	0	3	0
43	1	0	0	0	2	0
44	0	0	1	0	2	0
45	0	0	3	0	0	0
Total	584	150	1443	1090	458	966

**Table 4.** Parameter estimates and AIC values for each model.  
Numbers in parentheses are standard errors.

Mesh(mm)	Model	a	$\hat{b}$	c	AIC
67.4	①*	16.5 (1.8)	0.818 (0.084)	—	230.06
	②**	5.49 (1.00)	$4.62 \times 10^{-4}$ ( $7.52 \times 10^{-4}$ )	3.11 (0.49)	227.92
73.7	①*	13.8 (0.7)	0.603 (0.028)	—	1462.87
	②**	3.95 (0.25)	$4.90 \times 10^{-6}$ ( $4.33 \times 10^{-6}$ )	4.32 (0.26)	1394.33
86.5	①*	15.7 (0.9)	0.541 (0.030)	—	905.65
	②**	4.09 (0.29)	$8.84 \times 10^{-8}$ ( $12.72 \times 10^{-8}$ )	5.22 (0.41)	860.76

\*equation(4.5), \*\*equation(4.6)

3種類の目合ごとにモデルのパラメータの推定値, 標準誤差, およびAICを求めた(表4)。AICで判断すると, いずれの目合でもモデル①にくらべてモデル②の方が適切な曲線となっている。推定された曲線を図3に示す。計算は全体長のデータを用いたが, 図では主要な体長範囲である10 cmから40 cmまでを示した。破線がモデル①, 実線がモデル②, 各点が実際のデータの値を示す。データのうち白丸はデータ数50尾未満, 黒丸は50尾以上を示す。モデル②の方がモデル①よりあてはまりが良いこと, データ数が少ないところではばらつきが大きくなっていることが判然とする。

#### IV-2-3 仮説の検討

選択曲線は各目合毎に魚の体長の関数として考えてきた。このため試験操作を行った目合の選択曲線は得られるが, それと異なる目合の選択曲線については推定できない。目合の大きさがk倍になった場合, 体長もk倍になれば選択率はおおむね変化しないことが予想される。Tokai and Kitahara (1989)は選択曲線を次のような目合と体長の関数として表わした(以下東海—北原モデルと呼ぶ)。

$$\phi = \phi \left( \frac{L - L_0}{m - m_0} \right). \quad (4.9)$$

ここでmは目合の長さ,  $L_0$ と $m_0$ は目合と体長の単純な比例関係からのずれを表わすパラメータである。この形は試験した目合の中間の大きさの目合の選択曲線も得ることができ, 非常に利用価値が高い。Tokai and Kitahara (1989)ではこの仮定の妥当性と曲線の推定方法は直感的な図示に頼っている。ここでは最尤法を用いてパラメータ推定を行い, AICによるモデル比較という統計学的な立場からこの仮説の妥当性を検討する。

目合別モデルと東海—北原モデルの比較検討は次のような手順で行う。各目合ごとに曲線を求める目合別モデルの尤度関数は, それぞれの目合の尤度の積となる。前述のウシノシタのように3種類の目合の場合であれば, それぞれの目合に対するパラメータを $a_i, b_i, c_i (i=1, 2, 3)$ とすると, モデル①は

$$L(a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3) = L(a_1, b_1) L(a_2, b_2) L(a_3, b_3) \quad (4.10)$$

モデル②は

$$L(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3) =$$

$$L(a_1, b_1, c_1) L(a_2, b_2, c_2) L(a_3, b_3, c_3) \quad (4.11)$$

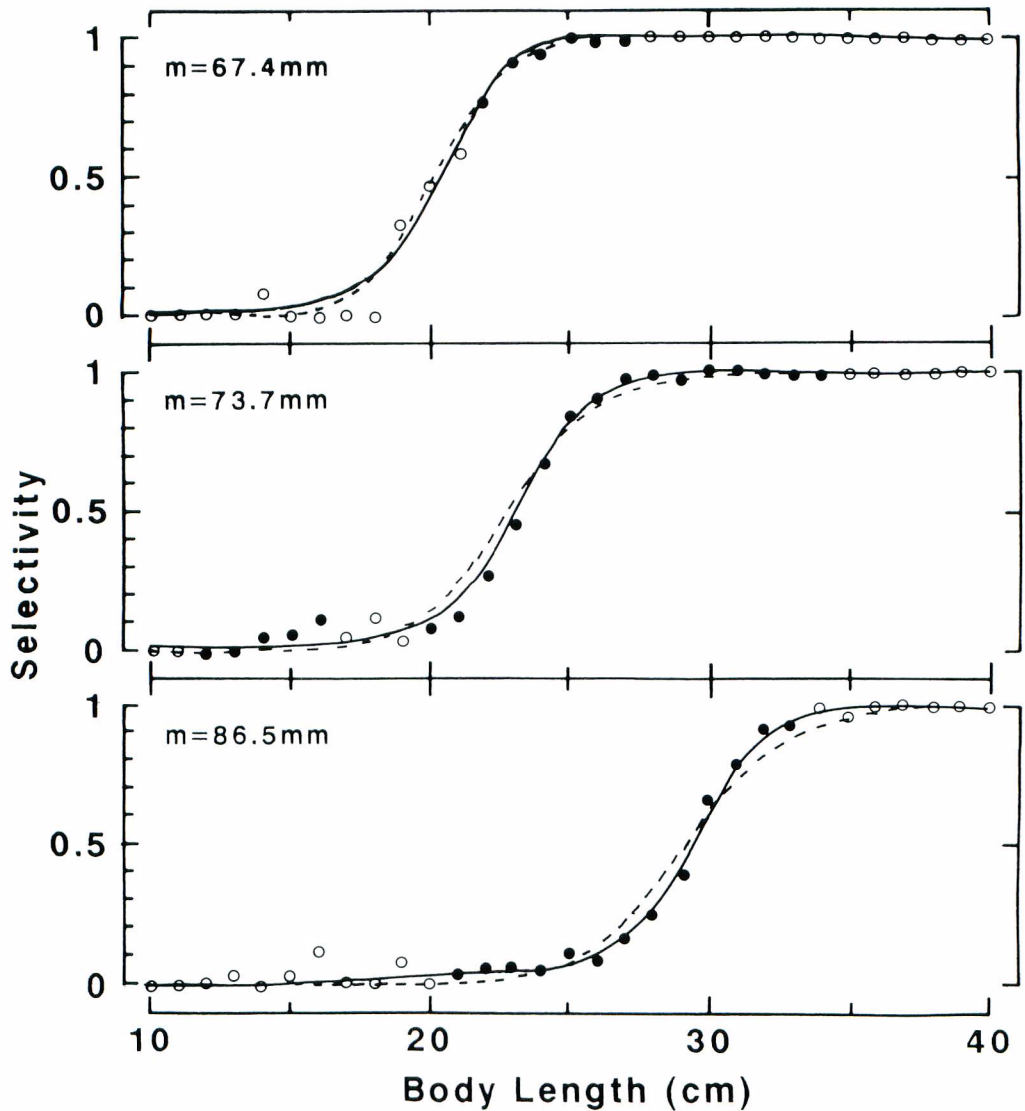


Fig. 3. Observe selectivities and estimated mesh selectivity curves. Only data for fish between 10 and 40cm length are plotted. Broken line and solid line indicate model ① and model ②, respectively. Open circles show sample sizes are less than 50 fish. Closed circles show more than 50 fish.

で表わされる。目合ごとに独立であるので、前節で得たパラメータの推定値をそのまま用いて計算すれば良い。最大対数尤度は各目合の最大対数尤度の和となる。

東海—北原モデルでは、モデル①の場合は

$$L(a, b, L_0, m_0 | C_{m1L1}, \dots, C_{m3Ln}, N_{m1L1}, \dots, N_{m3Ln})$$

$$= \prod_{m=m_1}^{m_3} \prod_{L=L_1}^{L_n} \frac{N_{mL}!}{(N_{mL} - C_{mL})! C_{mL}!} \left[ \frac{1}{1 + \exp \{ a - b(L - L_0)/(m - m_0) \}} \right]^{C_{mL}}$$

$$\times \left[ 1 - \frac{1}{1 + \exp \{ a - b(L - L_0)/(m - m_0) \}} \right]^{N_{mL} - C_{mL}} \quad (4.12)$$

モデル②の場合は

$$L(a, b, c, L_0, m_0 | C_{m1L1}, \dots, C_{m3Ln}, N_{m1L1}, \dots, N_{m3Ln})$$

$$= \prod_{m=m_1}^{m_3} \prod_{L=L_1}^{L_n} \frac{N_{mL}!}{(N_{mL} - C_{mL})! C_{mL}!} \left( \frac{1}{1 + \exp [ a - b \{ (L - L_0)/(m - m_0) \} c]} \right)^{C_{mL}}$$

$$\times \left( 1 - \frac{1}{1 + \exp [ a - b \{ (L - L_0)/(m - m_0) \} c]} \right)^{N_{mL} - C_{mL}} \quad (4.13)$$

となる。ここで $N_{mL}$ 、 $C_{mL}$ はそれぞれ目合 $m$ 時の魚体長 $L$ の網口に入った尾数と、網から脱落せず漁獲された尾数、 $m_1$ 、 $m_2$ 、 $m_3$ は3種類の目合の長さである。東海—北原モデルの場合は、(4.12)式と(4.13)式を最大とするようパラメータを求める。

東海—北原モデルのパラメータの推定結果を表5に、目合別モデルと東海—北原モデルのAICの値を表6に示す。AICはモデル①ではほとんど差がなく、モデル②では東海—北原モデルの方が小さく最適なモデルになっている。図4は最適なモデルから得られた $L_0$ と $m_0$ の値を使い、各データと推定された曲線の、 $(L - L_0)/(m - m_0)$ と選択率 $\phi$ の関係を示したものである。これから選択曲線について体長と目合の関数と仮定することの妥当性が示された。

**Table 5.** Parameter estimates for Tokai-Kitahara model. Numbers in parentheses are standard errors.

	$\hat{L}_0$	$\hat{m}_0$	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{c}$
Model ①*	-9.41 (10.29)	0.665 (2.109)	20.4 (6.2)	4.23 (1.27)	-
Model ②**	-90.4 (5.8)	-16.6 (1.2)	4.63 (0.24)	$2.99 \times 10^{-12}$ ( $2.35 \times 10^{-12}$ )	18.0 (0.4)

\*equation(4.5) \*\*equation(4.6)

**Table 6.** Comparison of AIC values for mesh independent model and Tokai-Kitahara model.

	Mesh independent	Tokai-Kitahara
Model ①*	2598.58	2598.60
Model ②**	2483.01	2479.80

\*equation(4.5) \*\*equation(4.6)

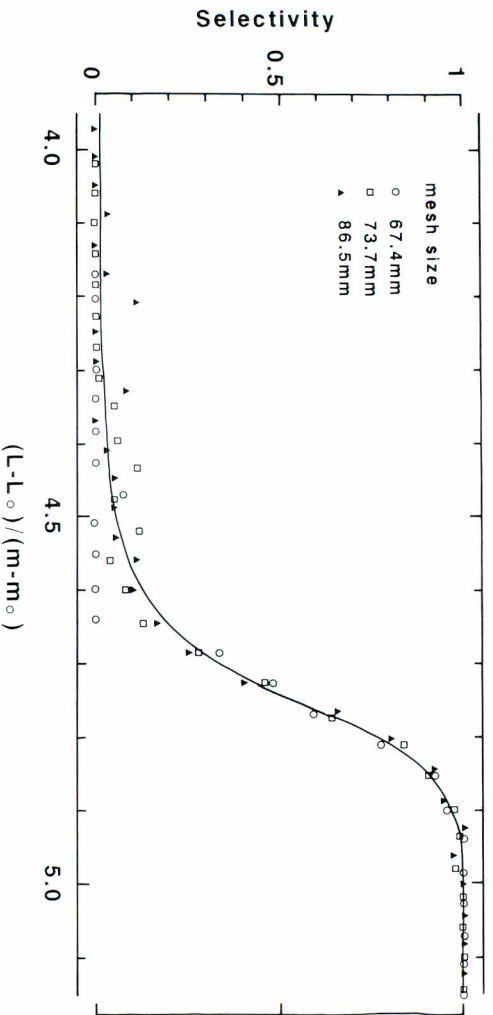


Fig. 4. Relationship between  $\frac{L-L_0}{m-m_0}$  and selectivity  $\phi$  based on Tokai-Kirahara model and estimated mesh selectivity curve.

#### IV-3 議論

網目選択曲線の推定は線形回帰の範囲内では困難であったため、これまでほとんど統計的に吟味されなかつた。データ発生モデルから直接パラメータを求める最尤法を用いれば、各体長のデータ数の違いによる選択率のばらつきを差異などを自動的にとりこんだ推定が可能となる。適切なデータの発生モデル（すなわち尤度関数）が考案できる場合には、最尤法による推定の有効性は大きい。ここでは選択曲線としてシグモイド型曲線（モデル①）とシグモイド拡張型曲線（モデル②）の2種類を考え、AICによる比較検討を行った。モデル②の方が適切な結果となったが、これは適用例としたデータが選択率50%の点を中心に対称とはなっていないためである。

選択曲線として正規分布の累積分布関数がいられることもあるが、この場合も(4.4)式において $\phi(L)$ を対応する関数形にすることにより、同様に解析することが可能である。ただし、正規分布の累積分布関数はシグモイド曲線同様、選択率50%の点を中心に対称な曲線しか表わすことができずまた解析的な取り扱ひも煩雑となることから本研究では扱わなかつた。

選択曲線を目合と体長の関数とする東海—北原のモデルを、最尤法によりパラメータ推定し、モデル比較により仮定の妥当性を吟味した。図示だけの比較ではどちらが適切なモデルか判断がつきにくい。AICに拠ると判定は容易である。Tokai and Kirahara (1989) では、 $L_0$ と $m_0$ を50%選択点と100%選択点の情報のみから推定しているのに比べ、本研究の方法では全データの情報を利用し得るという利点もある。

ここで扱ったモデルではパラメータ間の相関が強いものが多い。このためパラメータ値を変化させても尤度の値はほとんど変化せず、極大値に収束させるのが難しい場合がある。本研究の主目的は、曲線

の形を推定することになり、パラメータの値を推定することではないので、収束の困難さはここではあまり問題とならない。分散共分散行列は極大値によって定義されているので、推定値の標準誤差や相関係数が偏りを持つ可能性は残る。選択率 50% となる体長推定が主目的である場合は、選択率 50% の体長を曲線のパラメータとすることも有効であろう。

ここで扱ったモデルは網目選択曲線の推定以外にも応用範囲が広いと考えられる。例えば Welch and Foucher (1988) は、同じモデルで性成熟率の推定を行っている。 $\phi$  の関数形を適切に仮定することにより、はえなわの漁獲率の時間変化などを推定することも可能である。

Kirkwood and Walker (1986) は、刺網の網目選択曲線を最尤法を用いて推定した。刺網ではおおい網試験が不可能であるため、網への漁獲尾数はポアソン分布と仮定している。この場合も、本研究で示したような AIC によるモデル比較が有効である。

## 第 V 章 標識再捕法による死亡係数の推定

### V-1 はじめに

同時に多数の標識魚を放流してから長時間にわたって多くの魚が再捕される場合、再捕尾数の経時変化から漁獲係数  $F$ 、自然死亡係数  $M$  (あるいは漁獲係数  $F$  と全減少係数  $Z$ ) を推定することが可能である。再捕尾数の対数の再捕時間に対する回帰式から推定する方法と、再捕の過程を多項分布とみなして最尤法により推定する方法の 2 種類が従来から用いられてきた。本章では標識再捕法による死亡係数の推定の問題を一般的な立場から検討することにより、従来からの 2 つの推定方法の比較を行い、さらに正規分布や多項分布の正規近似などの新しいモデルについても検討を加えた。

### V-2 標識再捕法におけるパラメータ推定とモデル比較

標識再捕法による死亡係数の推定問題の数学的な定式化を行う。今後の拡張も考慮して一般的な立場から扱い、さまざまな尤度関数を考える。その一部として、従来の回帰式による方法と多項分布を用いた最尤法による推定方法も扱う。

#### V-2-1 尤度関数の導出

##### (1) 決定論的な漁獲方程式

放流された  $N$  尾の標識魚が、第  $i$  タイムステップにおいて自然死亡係数  $M_i$  で死亡し、漁獲係数  $F_i$  で漁獲 (再捕) されるとする。このとき再捕尾数  $C_i$  の理論値は次の式で表わされる。

$$C_i = NP_i \quad (5.1)$$

$$P_i = \frac{F_i}{F_i + M_i} [1 - \exp\{- (F_i + M_i)\}] \exp\left\{- \sum_{j=1}^{i-1} (F_j + M_j)\right\}, \quad (5.2)$$

ここで  $P_i$  は第  $i$  タイムステップで漁獲される割合を表わしており、

$$\exp\left\{- \sum_{j=1}^{i-1} (F_j + M_j)\right\} \quad : \quad i-1 \text{ までの生残割合} \quad (5.3)$$

$$\frac{F_i}{F_i + M_i} [1 - \exp\{- (F_i + M_i)\}] \quad : \quad i \text{ での漁獲割合} \quad (5.4)$$

の積である。

以下の解析では  $F$  と  $M$  は一定として扱う。この場合 (5.2) 式は

$$P_i = \frac{F}{F+M} [1 - \exp\{- (F+M)\}] \exp\{- (F+M)(i-1)\} \quad (5.5)$$

となる。さらにこの式をFと全減少係数Z (= F+M) で表わせば

$$P_i = \frac{F}{Z} \{1 - \exp(-Z)\} \exp\{-Z \cdot (i-1)\} \quad (5.6)$$

である。さらにM=0が仮定される場合は

$$P_i = \{1 - \exp(-F)\} \exp\{-F \cdot (i-1)\} \quad (5.7)$$

となる。

## (2) 確率概念の導入

現実の再捕尾数のデータは、上式で示される理論値のまわりにばらつくことになる。ばらつきの原因としてはサンプリング（漁獲）による偶然変動、標識魚や漁船の不均一分布、モデルの前提条件と現実とのずれ（例えば標識魚の逸散など）が考えられる。最尤法で扱うためには、この再捕データのばらつきを表わす発生確率モデル、すなわち漁獲過程を表わす尤度関数を考える必要がある。漁獲を単純ランダムサンプリングとみなし多項分布で表わせる場合もあるが、現実には様々な要因が関与するため単純ではない。どのようにばらつくかについては以下のように、多項分布、正規分布、対数正規分布、多項分布の正規近似など色々なモデルが考えられる。

### ① 多項分布の尤度（全尤度）

漁獲が単純ランダムサンプリングであれば、各魚について第*i*タイムステップで漁獲される確率を $P_i$ とすると、各タイムステップでそれぞれ $C_1, \dots, C_n$ 尾漁獲される確率は、次のような多項分布で表わされる。

$$\frac{N!}{(N-C)! \prod C_i!} \prod P_i^{C_i} (1 - \sum P_i)^{N-C} \quad (5.8)$$

ここで $C = \sum_{i=1}^n C_i$ である。上式をFとZの関数とみたものが多項分布による標識再捕の尤度関数で、

$$\begin{aligned} L(F, Z | N, C_1, \dots, C_n) \\ = \frac{N!}{(N-C)! \prod C_i!} \prod_{i=1}^n P_i^{C_i} (1 - \sum_{i=1}^n P_i)^{N-C} \end{aligned} \quad (5.9)$$

となる。ここで $P_i$ は(5.6)式で表わされる。

### ② 多項分布の尤度（条件付尤度）

(5.9)式において

$$\begin{aligned} Q_i &= \frac{P_i}{\sum P_i} \\ &= \frac{\exp\{-Z \cdot (i-1)\}}{1 - \exp(-Z \cdot n)} \{1 - \exp(-Z)\} \end{aligned} \quad (5.10)$$

として



$$L(F, Z | N, C_1, \dots, C_n) \\ = L_1(Z | C_1, \dots, C_n) L_2(F, Z | N, C) \quad (5.11)$$

と分解することができる。ここで

$$L_1(Z | C_1, \dots, C_n) = \frac{C!}{\prod C_i!} \prod_{i=1}^n Q_i^{C_i} \quad (5.12)$$

$$L_2(F, Z | N, C) = \frac{N!}{(N-C)! C!} \left( \sum_{i=1}^n P_i \right)^C \left( 1 - \sum_{i=1}^n P_i \right)^{N-C} \quad (5.13)$$

である。この場合近似的な推定法として、まず  $L_1$  を最大化する  $Z$  を求め、その値を  $L_2$  に代入して  $F$  を求める方法が考えられる。 $Z$  の最尤推定値の計算は、 $L_1$  の未知パラメータが 1 個であるため容易であり、 $F$  の最尤推定値は  $L_2$  から解析的に

$$\hat{F} = \frac{C\hat{Z}}{N \{ 1 - \exp(-\hat{Z} \cdot n) \}} \quad (5.14)$$

で求めることができる。 $L_1$  は全部で  $C$  尾漁獲されるという条件下での尤度であるので、条件付尤度と呼ばれる。これに対し (5.9) 式は全尤度といわれる。条件付尤度の場合の分散共分散の計算は、一般的には Hiramatsu and Kishino (1989) に述べた。北田 (1989) はこれを標識再捕データの解析に応用している。

(5.9) 式的全尤度モデルにおいて、 $P_i$  として  $F$  と  $M$  一定の (5.6) 式を用いた場合は、既に Paulik (1963) 等により適用と検討が行われている。Farebrother (1988) は (5.2) 式に相当する  $F$  と  $M$  に時間依存性を導入したモデルの検討を行っている。一方、(5.11) 式の条件付尤度のモデルは Tanaka (1967) と北田・平野 (1987) が用いている。

### ③正規分布の尤度

再捕尾数が理論値のまわりに正規分布でばらつくとする。

$$C_i = NP_i + \varepsilon_i \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \quad (5.15)$$

ここで  $\varepsilon_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) は互に独立である。この場合の尤度関数は

$$L(F, Z, \sigma^2 | N, C_1, \dots, C_n) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \prod_{i=1}^n \exp \left\{ -\frac{(C_i - NP_i)^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (5.16)$$

となる。このモデルでは未知パラメータについて非線形となるため、従来はほとんど用いられてこなかった。

### ④対数正規分布の尤度

漁獲尾数が理論値のまわりに対数正規分布でばらつくとする。

$$\ln(C_i) = \ln(NP_i) + \varepsilon_i \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \quad (5.17)$$

ここで  $\varepsilon_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) は互に独立。これを確率密度関数の形で書くと

$$f(\ln(C_1), \dots, \ln(C_n)) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \prod_{i=1}^n \exp \left\{ -\frac{(\ln(C_i) - \ln(NP_i))^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (5.18)$$

となる。(3.17)式と同様の変形を行い、Cに対するデータ発生確率とすると、対応する尤度関数は

$$L(F, Z, \sigma^2 | N, C_1, \dots, C_n) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \exp \left\{ -\frac{(\ln(C_i) - \ln(NP_i))^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (5.19)$$

となる。このモデルでは

$$\ln(C_i) = \ln \left[ N \frac{F}{Z} \{1 - \exp(-Z)\} \right] - Z \cdot (i-1) + \varepsilon_i \quad (5.20)$$

となり線形最小2乗法で未知パラメータを求めることができる。このため従来は、log-linearモデルと呼ばれるこのモデルがよく用いられてきた(田中, 1985)。ただし、再捕尾数が0のタイムステップがあると使えないという欠点をもつ。

#### ⑤多項分布の正規近似(一般化最小2乗法タイプ)の尤度

第II章第2節でみたように、多項分布は正規分布で近似される。(2.22)式に対応する近似を行うと(5.9)式 of 多項分布の尤度関数は

$$L(F, Z | N, C_1, \dots, C_n) = \frac{1}{(2\pi N)^{n/2} \{ \prod P_i (1 - \sum P_i) \}^{1/2}} \times \exp \left\{ -\sum_{i=1}^n \frac{(C_i - NP_i)^2}{2NP_i} - \frac{(\sum C_i - N\sum P_i)^2}{2N(1 - \sum P_i)} \right\} \quad (5.21)$$

となる。

#### ⑥多項分布の正規近似(一般化最小2乗法タイプ $\sigma^2$ 付)の尤度

(2.27)式に対応するばらつきのパラメータ $\sigma^2$ を導入したモデルを考えると

$$L(F, Z, \sigma^2 | N, C_1, \dots, C_n) = \frac{1}{(2\pi N \sigma^2)^{n/2} \{ \prod P_i (1 - \sum P_i) \}^{1/2}} \times \exp \left\{ -\sum_{i=1}^n \frac{(C_i - NP_i)^2}{2NP_i \sigma^2} - \frac{(\sum C_i - N\sum P_i)^2}{2N(1 - \sum P_i) \sigma^2} \right\} \quad (5.22)$$

となる。

#### ⑦多項分布の正規近似(加重最小2乗法タイプ)の尤度

(2.25)式に対応するモデルは

$$L(F, Z | N, C_1, \dots, C_n) = \frac{1}{(2\pi N)^{n/2} (\prod P_i)^{1/2}} \prod_{i=1}^n \exp \left\{ -\frac{(C_i - NP_i)^2}{2NP_i} \right\} \quad (5.23)$$

となる。

#### ⑧多項分布の正規近似(加重最小2乗法タイプ $\sigma^2$ 付)の尤度

(5.23)式にばらつきのパラメータ $\sigma^2$ を入れた(2.28)式に対応するモデルは

$$L(F, Z, \sigma^2 | N, C_1, \dots, C_n)$$

$$= \frac{1}{(2\pi N\sigma^2)^{n/2} (\prod_{i=1}^n P_i)^{1/2}} \prod_{i=1}^n \exp \left\{ -\frac{(C_i - NP_i)^2}{2NP_i\sigma^2} \right\} \quad (5.24)$$

となる。

⑤～⑧の多項分布の正規近似タイプのモデルはPaulik (1963) およびFarebrother (1985) の一般化最小2乗法, Sandland (1982) の加重最小2乗法のモデルに対応している。第II章で述べたように(2.22)式は(2.20)式と同等であるから, (5.21)式および(5.22)式は異なる再捕日のデータ間の相関を考慮しており, 一般化最小2乗法のモデルに対応していることになる。一方(5.23)式および(5.24)式ではデータ間の相関の影響は無視され, 再捕日による分散の違いだけが考慮されており, 加重最小2乗法のモデルに対応している。ただしPaulikやSandlandは, 再捕尾数の対数の正規分布モデル, すなわち, 多項分布の対数正規近似に相当するモデルを使っているため, ここで用いたモデルとは多少異なる。

以下の解析では(5.9)式の多項分布(全尤度)モデル, (5.12)式の多項分布(条件付尤度)モデル, (5.16)式の正規分布モデル, (5.19)式の対数正規モデル, (5.21)式の多項分布の正規近似(一般化)モデル, (5.22)式の多項分布の正規近似(一般化 $\sigma^2$ 付)モデル, (5.23)式の多項分布の正規近似(加重)モデル, (5.24)式の多項分布の正規近似(加重 $\sigma^2$ 付)モデルを用いる。P<sub>i</sub>としてはいずれも(5.6)式を用いる。

#### V-2-2 モデル比較

表7に示したエビ(Gulland, 1983), マダイ(日本栽培漁業協会, 1988), ガザミ(Kitada and Shiota, 1990)の3種類の標識再捕データを, V-2-1で述べた①～⑧の8種類のモデルを用いて解析を行った。

得られた結果を表8に示す。マダイのデータは81～90日の再捕尾数が0であったので, 対数正規モデルとの比較のため80日までのデータのみを用いた。ガザミのデータでは再捕尾数0のタイムステップがあったため対数正規モデルは適用しなかった。

ガザミの解析結果は自然死亡係数が小さいことを示唆していた。そこでM=0のモデルも考え, M≠0のモデルとの比較を行った(Hiramatsu and Kitada, 1991)。M=0の場合はP<sub>i</sub>として(5.7)式を用いている。この結果も合わせて表8に示す。

エビ及びマダイでは多項分布の正規近似(一般化および加重 $\sigma^2$ 付)モデル, ガザミではM=0の多項分布モデルが最適となった。

**Table 7.** Tag recovery data.

(A) Prawn. The number of release is 6481 (Gulland, 1990).

Days after release	Number of recoveries	Days after release	Number of recoveries
1～ 10	501	61～ 70	17
11～ 20	270	71～ 80	27
21～ 30	133	81～ 90	2
31～ 40	177	91～100	4
41～ 50	55		
51～ 60	96	Total	1282

**Table 7.**

(B) Red seabream. The number of release is 50000 (Japan sea-farming association, 1988).

Days after release	Number of recoveries	Days after release	Number of recoveries
1~ 10	120	51~ 60	6
11~ 20	61	61~ 70	3
21~ 30	47	71~ 80	4
31~ 40	9	81~ 90	0
41~ 50	20	Total	270

(C) Swimming crab. The number of release is 337 (Kitada and Shiota, 1990).

Days after release	Number of recoveries	Days after release	Number of recoveries	Days after release	Number of recoveries
1	7	21	0	41	0
2	0	22	0	42	2
3	1	23	3	43	0
4	4	24	1	44	1
5	2	25	0	45	0
6	0	26	4	46	1
7	0	27	2	47	1
8	2	28	4	48	1
9	1	29	0	49	2
10	4	30	1	50	0
11	1	31	3	51	2
12	1	32	0	52	1
13	0	33	2	53	3
14	2	34	1	54	2
15	2	35	2	55	1
16	4	36	0	56	3
17	2	37	4	57	2
18	0	38	0	58	0
19	2	39	1	59	3
20	1	40	1	60	1
				Total	91

**Table 8.** Parameter estimates and AIC values for eight models.

Numbers in parentheses are standard errors.

(A) Prawn

Model	$\hat{F}$ ( $\times 10^{-2}/10\text{day}$ )	$\hat{Z}$ ( $\times 10^{-1}/10\text{day}$ )	$\hat{\sigma}^2$	AIC
Multinomial distribution (full likelihood)	9.01 (0.36)	4.50 (0.14)	—	176.27
Multinomial distribution (conditional likelihood)	9.01 (0.36)	4.50 (0.14)	—	176.27
Log-normal	11.9 (4.5)	5.59 (0.66)	0.362 (0.162)	101.53
Normal distribution	9.34 (0.78)	4.79 (0.58)	$1.10 \times 10^3$ ( $0.49 \times 10^3$ )	104.43
Normal approximation of multinomial (generalized)	8.78 (0.34)	4.24 (0.14)	—	176.42
Normal approximation of multinomial (generalized with $\sigma^2$ )	9.07 (0.12)	4.53 (0.50)	11.9 (5.7)	100.13
Normal approximation of multinomial (weighted)	8.85 (0.36)	4.24 (0.14)	—	176.25
Normal approximation of multinomial (weighted with $\sigma^2$ )	9.06 (1.29)	4.53 (0.50)	11.9 (5.7)	100.35

(B) Red seabream

Model	$\hat{F}$ ( $\times 10^{-3}/10\text{day}$ )	$\hat{Z}$ ( $\times 10^{-1}/10\text{day}$ )	$\hat{\sigma}^2$	AIC
Multinomial distribution (full likelihood)	3.03 (0.27)	5.55 (0.39)	—	58.58
Multinomial distribution (conditional likelihood)	3.03 (2.75)	5.55 (0.39)	—	58.58
Log-normal	2.61 (0.81)	5.27 (0.68)	0.178 (0.089)	59.34
Normal distribution	3.13 (0.22)	5.79 (0.57)	42.7 (21.3)	58.73
Normal approximation of multinomial (generalized)	3.02 (0.27)	5.44 (0.38)	—	57.24
Normal approximation of multinomial (generalized with $\sigma^2$ )	3.04 (0.39)	5.56 (0.55)	2.03 (1.06)	56.84
Normal approximation of multinomial (weighted)	3.02 (0.27)	5.44 (0.38)	—	57.24
Normal approximation of multinomial (weighted with $\sigma^2$ )	3.04 (0.39)	5.56 (0.55)	2.03 (1.06)	56.85

## (C) Swimming crab

Model	$\hat{F}$ ( $\times 10^{-3}/\text{day}$ )	$\hat{Z}$ ( $\times 10^{-3}/\text{day}$ )	$\hat{\sigma}^2$	AIC
Multinomial distribution (full likelihood)	5.52 (1.06)	7.07 (6.08)	—	201.03
M=0	5.26 (0.55)	—	—	199.12
Multinomial distribution (conditional likelihood)	5.52 (1.06)	7.07 (6.08)	—	201.03
Normal distribution	5.70 (1.30)	8.26 (7.72)	2.04 (0.37)	219.14
M=0	5.30 (0.74)	—	2.05 (0.37)	217.29
Normal approximation of multinomial (generalized)	6.67 (1.00)	12.1 (4.7)	—	214.06
M=0	5.67 (0.51)	—	—	213.91
Normal approximation of multinomial (generalized with $\sigma^2$ )	6.43 (1.11)	12.6 (5.4)	1.28 (0.27)	214.49
M=0	5.36 (0.63)	—	1.28 (0.26)	214.37
Normal approximation of multinomial (weighted)	6.77 (1.06)	12.1 (4.8)	—	214.27
M=0	5.79 (0.61)	—	—	214.05
Normal approximation of multinomial (weighted with $\sigma^2$ )	6.42 (1.18)	12.6 (5.4)	1.28 (0.28)	214.81
M=0	5.38 (0.74)	—	1.27 (0.27)	214.68

## V-3 議論

## (1)モデルの比較

標識再捕法では対数正規分布を用いた線形回帰による方法と、多項分布を用いた最尤法による方法の2種類の推定方法が用いられてきた。2つの方法のどちらが適切かについては従来明確な判断はなされてこなかった。これをAICに拠ってデータから判断することができる。表8の結果は、データによりどちらがより適切かは異なることを示している。エビでは多項分布のあてはまりが非常に悪いが、マダイでは大差無く、ガザミでは多項分布の方が良いモデルとなっている。

多項分布モデルの場合、全尤度による推定と条件付尤度による推定では、点推定値、区間推定値とも差が無かった。条件付尤度の方が計算がはるかに容易なことを考えると、条件付尤度による方法も有力であろう。

## (2)Mの有無に関するモデル選択

ガザミではM≠0とM=0の2種類のモデルを考えた。結果はM=0のモデルの方が適切なモデルと

なった。これはFに比べMが小さく、このデータからはMを推定できないことを示している。これは対象が大型のカニであり、捕食者による死亡がほとんど無いためと考えられる。背甲部ペイント標識で標識再死亡や標識脱落も非常に少ないため、Fに比べMが無視できるという結論は妥当であると考えられる。

$M \neq 0$  のモデルに比べ  $M = 0$  のモデルでは標準誤差が半分程度になっている。これは、 $M \neq 0$  のモデルではデータからは推定できないパラメータMを導入したため不安定になり、誤差が大きくなったと考えられる (Hiramatsu and Kitada, 1991)。

### (3)多項分布の正規近似モデルについて

異なる再捕日間の再捕尾数の相関を考慮した一般化最小2乗法タイプのモデルと、相関を無視した加重最小2乗法タイプのモデルでは結果に大差なかった。これは相関を考慮した効果があまり大きくないことを示しており、実用上は計算の容易な加重タイプのモデルで十分であろう。

一方エビの場合のように、ばらつきのパラメータ $\sigma^2$ の有無は結果に大きな違いを生じさせることがある。これは $\sigma^2$ が1より大きくなっていることから明らかなように、多項分布で記述されるよりデータのばらつきが大きいためであり、多項分布モデルのあてはまりが非常に悪いこととも関連している。標準誤差は多項分布が最も小さくなっているため、精度良く推定されていると誤解されやすいが、不適切なモデルを用いた場合は標準誤差の推定値も不適切である。これについては第VI章でも検討する。

ガザミの場合は、多項分布モデルと多項分布の正規近似モデルの推定値にかなりの差がみられる。これは日々の再捕尾数が少なく、正規近似が悪くなっているためである。

### (4)適切なモデル

先述したように適切なモデルはデータにより異なる。従ってモデルを一つに特定して解析せずに、複数のモデルを考えてモデル選択を行うことが望ましい。解析の前には、片対数に再捕尾数をプロットしFとM一定の仮定が満たされているかをチェックすることも必要である。

今回の解析例のうちで注意が必要なのはエビの場合である。多項分布の正規近似（一般化 $\sigma^2$ 付および加重 $\sigma^2$ 付）モデルが最適となったが、AICの値の近い対数正規モデルの点推定値とはかなり異なっている。適切なモデル選択や信頼区間の推定は上記の例のように難しい場合もみうけられ、この克服法については今後の課題として残されている。

## 第VI章 DeLury 法

### VI-1 はじめに

DeLury法は、加入や逸散が無く自然死亡の無視できる資源から得られる一連の漁獲尾数Cと努力量Xのデータから、初期資源尾数Nと漁獲能率qを推定する方法である。回帰式による推定方法としては、努力量当り漁獲尾数 $C_i/X_i$ の累積漁獲尾数に対する線形回帰式からパラメータを推定する第1モデルと、 $\ln(C_i/X_i)$ の累積努力量に対する線形回帰式からパラメータを推定する第2モデルの2種類がある。これとは別に2項分布のモデルで最尤法により推定する方法がZippin (1956) らにより検討されている。

DeLury法は、直感的には努力量当り漁獲尾数 $C_i/X_i$ の時間的な減少からパラメータを推定する方法と理解されている。本章では、閉じた資源から得られる漁獲尾数のデータを利用したパラメータ推定法の一つとして、前章の標識再捕法との関連にも注意しながら一般的な立場から扱う。自然死亡が無視できない場合への拡張についても検討する。

## VI-2 DeLury法におけるパラメータ推定とモデル比較

DeLury法による $N$ と $q$ の推定の数学的な定式化を行う。第V章の標識再捕の例を参考に、一般的な立場からさまざまなモデルを考える。従来から用いられてきた、DeLuryの第1モデルや第2モデル、2項分布モデルなどはその一部として扱われる。

### VI-2-1 尤度関数の導出

#### (1)決定論的な漁獲方程式

DeLury法の場合も、基本式は標識再捕の場合と同じく(5.1)式と(5.2)式である。データとして与えられるのは漁獲尾数 $C_i$ と漁獲努力量 $X_i$ (ここで $F_i=qX_i$ )であり、普通 $M=0$ が仮定されるので、対応する式は次のように簡略化される。

$$C_i = NP_i \quad (6.1)$$

$$P_i = \{1 - \exp(-qX_i)\} \exp(-q \sum_{j=1}^{i-1} X_j) \quad (6.2)$$

$qX_i$ が小さい場合には

$$1 - \exp(-qX_i) \approx qX_i \quad (6.3)$$

で近似することができ

$$P_i = qX_i \exp(-q \sum_{j=1}^{i-1} X_j) \quad (6.4)$$

となる。計算が簡単になるので、この近似形で扱われることも多い。

石岡・猪子(1982)はDeLury法を $M \neq 0$ の場合にも拡張している。このとき(5.2)式は

$$P_i = \frac{qX_i}{qX_i + M} \{1 - \exp(-qX_i - M)\} \exp\{-q \sum_{j=1}^{i-1} X_j - M \cdot (i-1)\} \quad (6.5)$$

となる。

$$1 - \exp(-qX_i - M) \approx qX_i + M \quad (6.6)$$

と近似すれば

$$P_i = qX_i \exp\{-q \sum_{j=1}^{i-1} X_j - M \cdot (i-1)\} \quad (6.7)$$

である。

#### (2)確率概念の導入

基本となるのは(6.1)、(6.2)式あるいは(6.5)式であるが、実際の漁獲尾数のデータはこれらの式のまわりにばらつくことになる。標識再捕の場合と同様、これらのばらつきを記述するモデルとして2項分布の正規近似、多項分布の正規近似、正規分布、対数正規分布などを考える。

#### ①2項分布の正規近似の尤度

漁獲の過程を単純ランダムサンプリングとみなすことができれば、漁獲尾数のばらつきは多項分布で表わすことができ、その場合の尤度関数は標識再捕法の(5.9)式と同様



$$L(N, q | C_1, \dots, C_n, X_1, \dots, X_n) \\ = \frac{N!}{(N-C)! \prod C_i!} \prod_{i=1}^n P_i^{C_i} (1 - \sum_{i=1}^n P_i)^{N-C} \quad (6.8)$$

となる。

(6.2) 式のように自然死亡を無視できる場合には (6.8) 式の多項分布は、次のような 2 項分布の積の形で書くことができる (Zippin, 1956)。

$$L(N, q | C_1, \dots, C_n, X_1, \dots, X_n) \\ = \prod_{i=1}^n \frac{N_i!}{(N_i - C_i)! C_i!} \{1 - \exp(-qX_i)\}^{C_i} \{\exp(-qX_i)\}^{N_i - C_i}. \quad (6.9)$$

ここで  $N_i$  は  $i$  における資源尾数

$$N_i = N - \sum_{j=1}^{i-1} C_j \quad (6.10)$$

である。

(6.9) 式において、 $N_i$  は十分大きいので、各 2 項分布を正規分布で近似することができ

$$L(N, q | C_1, \dots, C_n, X_1, \dots, X_n) \\ = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\{N_i p_i (1 - p_i)\}^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(C_i - N_i p_i)^2}{2 N_i p_i (1 - p_i)}\right\} \quad (6.11)$$

となる。なおここで

$$p_i = 1 - \exp(-qX_i) \quad (6.12)$$

とした。

2 項分布の尤度を用いた解析方法は、努力量  $X$  が一定の場合については Zippin (1956) により検討が行われている。Schnute (1983) は同様の条件の下で  $q$  (漁獲能率) が時間的に変化する場合を検討している。さらに Matsumiya (1990) は、Schnute (1983) におけるモデル比較を AIC により行うことを提唱している。Akamine (1990) は 2 項分布の正規近似モデルを用い、努力量  $X_i$  を導入している。Akamine *et al.* (1992) は、(6.11) 式の 2 項分布の正規近似モデルに対して、尤度比統計量からパラメータの信頼領域を求める (2.12) 式を用いた方法を示している。

2 項分布の正規近似モデルにおいて  $M$  を導入するには

$$P_i = \frac{qX_i}{qX_i + M} \{1 - \exp(-qX_i - M)\} \quad (6.13)$$

$$N_i = (N - \sum_{j=1}^{i-1} C_j) \exp\{-M \cdot (i - 1)\} \quad (6.14)$$

とすれば良い。

## ② 2 項分布の正規近似 ( $\sigma^2$ 付) の尤度

(6.11) 式にばらつきのパラメータ  $\sigma^2$  を導入すれば

$$L(N, q, \sigma^2 | C_1, \dots, C_n, X_1, \dots, X_n) \\ = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\{N_i p_i (1-p_i)\}^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{(C_i - N_i p_i)^2}{2 N_i p_i (1-p_i) \sigma^2} \right\} \quad (6.15)$$

となる。Mの導入はやはり(6.13)と(6.14)式を用いることにより可能である。

### ③多項分布の正規近似( $\sigma^2$ 付)の尤度

(6.8)式の多項分布の正規近似としては何種類か考えられるが、ここでは(2.28)式に対応するばらつきのパラメータ $\sigma^2$ を入れた

$$L(N, q, \sigma^2 | C_1, \dots, C_n, X_1, \dots, X_n) \\ = \frac{1}{(2\pi N \sigma^2)^{n/2} (\prod P_i)^{1/2}} \prod_{i=1}^n \exp \left\{ -\frac{(C_i - NP_i)^2}{2 NP_i \sigma^2} \right\} \quad (6.16)$$

を考える。Mを導入する場合には $P_i$ として(6.5)式を用いれば良い。

### ④正規分布の尤度

漁獲尾数が理論値のまわりに正規分布で変動するとする。

$$C_i = NP_i + \varepsilon_i \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \quad (6.17)$$

ここで $\varepsilon_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )は互に独立。このとき尤度関数は(5.16)式と同様

$$L(N, q, \sigma^2 | C_1, \dots, C_n, X_1, \dots, X_n) \\ = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \prod_{i=1}^n \exp \left\{ -\frac{(C_i - NP_i)^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (6.18)$$

となる。Mを導入する場合には、やはり $P_i$ として(6.5)式を用いれば良い。

### ⑤DeLuryの第1モデルの尤度

DeLuryの第1モデルは(6.18)式のモデルとは異なり、単位努力量当りの漁獲尾数が理論値のまわりに正規分布するモデルに相当する。あるいは漁獲尾数がそのときの努力量の2乗に比例した分散でばらつくとも考えられる。すなわち

$$C_i = NP_i + \varepsilon_i \\ = N_i p_i + \varepsilon_i \quad \varepsilon_i \sim N(0, X_i^2 \sigma^2) \quad (6.19)$$

ここで $\varepsilon_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )は互に独立。 $N_i$ として(6.10)式、 $p_i$ として(6.12)式を用いる。上式において(6.3)式の近似を用い、さらに両辺を $X_i$ で割ると

$$\frac{C_i}{X_i} = qN_i + \varepsilon_i \\ = qN - q \sum_{j=1}^{i-1} C_j + \varepsilon_i \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \quad (6.20)$$

ここで  $\varepsilon_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) は互に独立。この場合、線形最小 2 乗法で  $N$  と  $q$  が求められるため DeLury の第 1 モデルとして広く用いられている。

(6.19) 式を尤度関数で書けば

$$\begin{aligned} L(N, q, \sigma^2 | C_1, \dots, C_n, X_1, \dots, X_n) \\ = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{X_i} \exp \left\{ -\frac{(C_i - N_i p_i)^2}{2 X_i^2 \sigma^2} \right\} \end{aligned} \quad (6.21)$$

となる。

$M$  をパラメータとして導入する場合には次の 2 種類のモデルが考えられる。すなわち

$$\begin{aligned} L(N, q, M, \sigma^2 | C_1, \dots, C_n, X_1, \dots, X_n) \\ = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{X_i} \exp \left\{ -\frac{(C_i - NP_i)^2}{2 X_i^2 \sigma^2} \right\} \end{aligned} \quad (6.22)$$

とし (6.5) 式の  $P_i$  を用いる方法と

$$\begin{aligned} L(N, q, M, \sigma^2 | C_1, \dots, C_n, X_1, \dots, X_n) \\ = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{X_i} \exp \left\{ -\frac{(C_i - N_i p_i)^2}{2 X_i^2 \sigma^2} \right\} \end{aligned} \quad (6.23)$$

とし (6.13) 式及び (6.14) 式の  $P_i$  と  $N_i$  を用いる方法である。(6.21) 式の  $M=0$  のモデルとの連続性は (6.23) の方が良いが、モデルそのものとしては (6.22) 式の方が一般的である。

#### ⑥対数正規分布 (DeLury の第 2 モデル) の尤度

漁獲尾数が理論値のまわりに対数正規分布でばらつくとする。

$$\ln(C_i) = \ln(NP_i) + \varepsilon_i \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \quad (6.24)$$

ここで  $\varepsilon_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) は互に独立。このとき尤度関数は (5.19) 式と同様

$$\begin{aligned} L(N, q, \sigma^2 | C_1, \dots, C_n, X_1, \dots, X_n) \\ = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \exp \left\{ -\frac{(\ln(C_i) - \ln(NP_i))^2}{2\sigma^2} \right\} \end{aligned} \quad (6.25)$$

となる。DeLury の第 2 モデルは、上記モデルにおいて  $P_i$  として (6.4) の近似式を用いて

$$\ln(C_i/X_i) = \ln(Nq) - q \sum_{j=1}^{i-1} X_j + \varepsilon_i \quad (6.26)$$

としたものである。したがって上記の対数正規モデルは、DeLury の第 2 モデルに相当する。

$M$  を導入する場合は  $P_i$  として (6.5) 式を用いれば良い。(6.26) 式に  $M$  を導入すれば、

$$\ln(C_i/X_i) = \ln(Nq) - q \sum_{j=1}^{i-1} X_j - M \cdot (i-1) + \varepsilon_i \quad (6.27)$$

となるが、これは石岡・猪子 (1982) の方法 1 のモデルに相当している。

以下の解析では (6.11) 式の 2 項分布の正規近似、(6.15) 式の 2 項分布の正規近似 ( $\sigma^2$  付)、(6.

16) 式の多項分布の正規近似 ( $\sigma^2$ 付), (6.18) 式の正規分布, (6.21) 式のDeLuryの第1モデル, (6.25) 式のDeLuryの第2モデルを用いた。

#### VI-2-2 モデル比較

マハゼ (能勢, 1959) とガザミ (石岡・猪子, 1982) の2種類の漁獲尾数と努力量のデータを, VI-2-1の①~⑥のモデルを用いて解析を行った。用いたデータを表9に示す。

**Table 9.** Catch and effort data.

(A) Japanese common goby (Nose, 1959)

Date	Catch in number ( $\times 10^6$ )	Effort ( $\times 10^3$ )	CPUE ( $\times 10^2$ )	
Sept.	1-10	2.8	20	1.4
	11-20	7.0	42	1.7
	21-30	12.1	86	1.4
Oct.	1-10	7.7	67	1.1
	11-20	9.5	88	1.1
	21-31	5.9	66	0.9
Nov.	1-10	7.1	68	1.0
	11-20	2.2	31	0.7
	21-30	4.1	50	0.8
Dec.	1-10	2.8	34	0.8
	11-20	2.3	24	1.0
	21-31	2.8	26	1.1
Jan.	1-10	1.4	18	0.8
	11-20	0.5	9	0.6
	21-31	0.2	4	0.5

(B) Blue crab (Ishioka and Inoko, 1982)

Date	Catch in number	Effort	CPUE	
October	2	946	15	63
	3	1036	17	61
	4	811	15	54
	5	619	14	44
	6	336	10	34
	7	256	8	32
	8	244	7	35
	9	221	9	25
	10	151	5	30
	11	169	6	28
	12	219	7	31
	13	131	6	22
	14	124	5	25
	15	20	1	20

石岡・猪子 (1982) は、ガザミのデータにおいて 1 日あたり  $M=0.005$  と固定して計算を行っている。この妥当性を検討するため、ガザミのデータは  $M$  を考慮しないモデル、 $M$  も未知パラメータとしたモデル、及び  $M=0.005$  と置いたモデルの 3 種類で検討を行った。

各モデルのパラメータの推定値と AIC の値を表 10 に示す。最適なモデルはマハゼでは 2 項分布の正規近似 ( $\sigma^2$  付) モデル、ガザミでは通常の DeLury の第 1 モデルとなった。

### VI-3 議論

#### (1) 2 項分布モデルについて

マハゼの場合は 2 項分布の正規近似モデルのあてはまりが非常に悪い。これはデータのばらつきが 2 項分布で表わされるよりもはるかに大きいためである。2 項分布の正規近似 ( $\sigma^2$  付) モデルにおいて、ばらつきのパラメータ  $\sigma^2$  が、1 よりも非常に大きくなっていることから明らかである。

標準誤差の大小でモデルの推定精度をチェックしてモデルの比較をすることは、必ずしも正しい方法とはいえないことがある。2 項分布の正規近似モデルのあてはまりが悪いにもかかわらず、標準誤差は非常に小さいことは注意すべきである (表 10)。既に V-3 節でも述べたように、モデル自体が悪い場合にはその標準誤差も誤った値となる。計算される標準誤差は、あくまで 2 項分布が正しいときの標準誤差である。2 項分布タイプのモデルを用いる場合には、信頼区間を著しく過小評価してしまう危険性があるので、他のモデルと比較するか Akamine *et al.* (1992) のような適合度検定を行うことが望ましい。

#### (2) M の有無について

ガザミでは  $M$  を無視した通常のモデルの他に、 $M$  もパラメータとしたモデル、及び  $M=0.005$  に固定したモデルも考えた。モデル比較の結果は  $M$  を無視した通常のモデルのあてはまりが良く、 $M$  をパラメータとしても尤度はほとんど良くなり、AIC でみるとかえって悪くなっている。むしろ多くのモデルで  $M$  は負の値となることは加入の存在をも示唆している (表 10 (B))。自然死亡や加入を導入する強い根拠が

**Table 10.** Parameter estimates and AIC values for each model.

Numbers in parentheses are standard errors.

(A) Japanese common goby

Model	$\hat{N}$ ( $\times 10^8$ )	$\hat{q}$ ( $\times 10^{-6}$ )	$\hat{\sigma}^2$	AIC
Normal approximation of binomial	1.34 (0.0005)	1.14 (0.0007)	—	$1.01 \times 10^6$
Normal approximation of binomial (with $\sigma^2$ )	1.31 (0.13)	1.17 (0.17)	$6.75 \times 10^4$ ( $2.48 \times 10^4$ )	438.96
Normal approximation of multinomial (with $\sigma^2$ )	1.32 (0.14)	1.16 (0.17)	$6.77 \times 10^4$ ( $2.48 \times 10^4$ )	439.73
Normal distribution	1.21 (0.12)	1.30 (0.17)	$2.57 \times 10^{11}$ ( $0.94 \times 10^{11}$ )	442.67
DeLury's first model	1.25 (0.12)	1.24 (0.18)	$2.19 \times 10^2$ ( $0.80 \times 10^2$ )	440.70
DeLury's second model	1.22 (0.12)	1.27 (0.22)	$3.18 \times 10^{-2}$ ( $1.16 \times 10^{-2}$ )	444.57

## (B) Blue crab

Model	$\hat{N}$ ( $\times 10^3$ )	$\hat{q}$ ( $\times 10^{-3}$ )	$\hat{M}$ ( $\times 10^{-3}$ )	$\hat{\sigma}^2$	AIC
Normal approximation of binomial distribution	7.63 (0.18)	9.46 (0.40)	—	—	151.60
M is variable	6.19 (0.33)	11.4 (0.5)	-52.1 (19.7)	—	150.12
M is constant	7.86 (0.20)	9.18 (0.41)	5.00 Fixed	—	152.09
Normal approximation of binomial (with $\sigma^2$ )	7.59 (0.31)	9.53 (0.71)	—	3.26 (1.24)	138.61
M is variable	6.15 (0.52)	11.4 (0.8)	-53.8 (32.6)	3.03 (1.15)	139.29
M is constant	7.82 (0.35)	9.25 (0.73)	5.00 Fixed	3.29 (1.25)	138.79
Normal approximation of multinomial (with $\sigma^2$ )	7.61 (0.35)	9.49 (0.72)	—	3.25 (1.23)	139.79
M is variable	6.72 (1.95)	10.9 (3.5)	-14.5 (36.3)	3.20 (1.22)	141.63
M is constant	7.97 (0.40)	9.01 (0.72)	5.00 Fixed	3.29 (1.25)	139.91
Normal distribution	7.78 (0.47)	9.25 (0.76)	—	$1.39 \times 10^3$ ( $0.53 \times 10^3$ )	147.09
M is variable	10.4 (5.4)	6.84 (3.72)	29.3 (44.6)	$1.35 \times 10^3$ ( $0.51 \times 10^3$ )	148.65
M is constant	8.12 (0.52)	8.84 (0.76)	5.00 Fixed	$1.38 \times 10^3$ ( $0.52 \times 10^3$ )	146.96
DeLury's first model	7.62 (0.29)	9.39 (0.67)	—	11.2 (4.2)	135.88
Equation (6.22)	7.23 (2.04)	9.92 (3.11)	-5.3 (31.4)	12.4 (4.7)	139.27
M is constant	7.98 (0.37)	8.92 (0.66)	5.00 Fixed	12.5 (4.7)	137.38
Equation (6.23)	6.13 (0.42)	11.3 (0.6)	-56.4 (27.7)	9.98 (3.77)	136.26
M is constant	7.86 (0.33)	9.11 (0.69)	5.00 Fixed	11.3 (4.3)	136.05
DeLury's second model	7.55 (0.28)	9.42 (0.82)	—	$1.19 \times 10^{-2}$ ( $0.45 \times 10^{-2}$ )	138.48
M is variable	6.54 (1.84)	11.2 (3.9)	-16.0 (34.4)	$1.17 \times 10^{-2}$ ( $0.44 \times 10^{-2}$ )	140.26
M is constant	7.95 (0.32)	8.87 (0.82)	5.00 Fixed	$1.20 \times 10^{-2}$ ( $0.45 \times 10^{-2}$ )	138.63

無ければ、これらを見捨てた通常のモデルでとりあえず解析し、Mや加入の導入に関しては今後の検討課題とするのが適切ではないかと考えられる。

### (3)最適なモデル

標識再捕の場合と同様、最適なモデルはデータによって異なる。このため2項分布の正規近似モデル、DeLuryの第1モデル、第2モデルなど複数のモデルを考え比較することが望ましい。多くの場合DeLuryの第1モデルあるいは第2モデルが、最適なモデルかそれに近い場合が多いので、このどちらかを考えるだけで十分であり、従来発表されている解析結果は正しく評価してよいと考えられる。一方2項分布モデルの場合は、推定値自体にはあまり偏りは無いものの、標準誤差を過小評価する危険性が高い。従って2項分布モデルのみの単独使用は危険性が伴い、2項分布を仮定した過去の解析結果においては、適合度のチェックや再検討を要する。

### (4)モデルの拡張性

DeLury法ではMの導入以外にも、qが変化する場合 (Polovina, 1986; Schnute, 1983)、加入がある場合 (小島・石橋, 1985) への拡張が試みられている。最尤法による推定ではこれらの導入も可能であり、qの変化や加入の有無をAICによるモデル比較の立場から検討することができる。

## 第VII章 総 合 討 論

最尤法の長所と短所について、第VI章までの解析結果をふまえて議論する。特に従来から用いられていた線形最小2乗法 (線形回帰) による推定方法との違いを強調する。

### VII-1 最尤法による推定の長所

最尤法による推定の第1の長所は、使用可能なモデルの範囲が広がったことである。既に述べたように、従来の線形最小2乗法による解析では、未知のパラメータについてモデルを線形に変形または近似し、データはそのまわりに正規分布でばらついていると仮定する。これは計算の便宜のための大きな仮定であった。

本研究のようにデータ発生モデルが確立できれば、最尤法と非線形最適化プログラムの使用により、直接未知のパラメータを求めることが可能である。第III章の再生産式の推定は、線形化しないモデルを使うことにより適切な推定が行えるようになった実例であり、式変形は単なる計算の便宜ではなく想定しているモデルをも変形していることを明瞭に示している。正規分布以外の2項分布や多項分布などを直接的に扱うことができるのも最尤法の大きな長所であり、第IV章の網目選択曲線の推定は、2項分布の尤度を使うことにより適切な推定が行えるようになった実例である。

解析のための式変形を特に必要としなくなったことで、従来は別々に扱われてきた手法を統一的に取り扱うことも可能となった。例えば漁獲尾数データをもとに、資源尾数、漁獲係数、自然死亡係数などを推定する方法としては、第V章で扱った標識再捕法、第VI章で扱ったDeLury法、およびコホート解析 (本研究では取り扱わなかった) がある。これら3つの方法は、いずれも閉じた資源を考え、

$$C_i = N \frac{F_i}{F_i + M_i} [1 - \exp \{- (F_i + M_i)\}] \exp \left\{ - \sum_{j=1}^{i-1} (F_j + M_j) \right\} \quad (7.1)$$

の基本式により、漁獲尾数  $C_i$  のデータとそれ以外の利用可能な情報を用いて未知のパラメータを推定す

るものである(平松, 1990 b)。利用可能な情報の違いがそれぞれの手法の差異に対応している。標識再捕法では、再捕尾数 $C$ のデータに加え、初期資源尾数 $N$ (放流尾数)の情報により $F$ と $M$ を推定する。DeLury法では、漁獲尾数 $C$ のデータに加え漁獲努力量 $X$ のデータが用いられ、さらに $M=0$ が仮定される状況を扱う。推定するパラメータは $N$ と漁獲能率 $q$ である。コホート解析では、シングルコホート解析とマルチコホート解析で多少異なるが、基本的には漁獲尾数 $C$ のデータに加え自然死亡係数 $M$ が仮定され、未知のパラメータ $N$ と $F_1$ を推定する。

上記をまとめると

	データまたは仮定	未知パラメータ
標識再捕法	$C_i, N$	$F, M$
DeLury法	$C_i, X_i, M=0$	$N, q$
コホート解析	$C_i, M$	$N, F_1$

となる。従来は未知パラメータの違いにより、それぞれが全く異なった推定の方法として扱われてきたわけである。これらを統一的に考えることにより、従来の慣習にとらわれることなく、より柔軟なモデル作りを行うことが可能である。例えば第V章、第VI章では標識再捕法で $M=0$ のモデル、DeLury法で $M$ もパラメータとするモデルも考え得た。

最小2乗法では複数のモデルの相互比較が難しかった。残差平方和、標準誤差、相関係数などが比較の判断基準となることが多いが、いずれも万能的に有効な基準ではない。例えば正規分布モデルと対数正規分布モデルを残差平方和で比較しても無意味である。第V章と第VI章でみたように、標準誤差が小さくても精度良く推定されているとは限らないことがある。最尤法においてAICを用いれば、2項分布と正規分布といった異なる確率分布モデル間の比較や、パラメータ数の異なるモデル間の統一的な比較が可能である。データのばらつき方を正規分布に限った場合でも、非線形最小2乗法で十分なパラメータ推定はできるが、モデル比較を考えた場合には最尤法で扱う方が良い。

モデルの比較は2つに大別できる。第1は決定論的なモデル自体の比較で、例えば、(7.1)式で $F$ を一定とするか、あるいは $F$ に時間変化を含むモデルとするかというものである。第2はデータのばらつき方に関するモデルの比較で、正規分布のモデルが良いか多項分布のモデルが良いかというものである。標識再捕法では、従来最小2乗法による対数正規分布のモデルと最尤法による多項分布のモデルが使われていたが、相互の比較は行われていなかった。双方を最尤法で扱うことにより、本研究のようなAICによる両者の比較を可能とした。第VI章ではDeLuryの第1モデル、第2モデル及び2項分布モデルの比較を行った。これらは後者のデータのばらつき方に関する比較に相当し、同時に行った $M$ の有無の検討は前者の決定論的なモデルの比較に相当する。

## VII-2 最尤法による推定の短所

多くの長所があるにもかかわらず、最尤法がこれまで頻用されてこなかったのは幾つかの理由がある。以下に最尤法の短所を挙げる。

### ①計算が難しい

最尤推定値は、多くの場合解析的には求められず数値的に求める必要がある。このための数値計算が繁雑であることが多く、推定された値は単なる極大値で最大値(最尤推定値)である保証はない。これ



に対し線形回帰であれば、計算は容易でしかも解は一意的に求まる。

②最尤法になじみがない

入門書とする本がほとんど無いため勉強しにくい。多くの統計学の入門書では最小2乗法を中心に記述されている。

③正規分布以外なじみが薄い

尤度関数を考える上で、多項分布をはじめとして様々な確率分布の知識が必要であるが、多くの水産研究者にとって正規分布以外はなじみが薄い。

④最尤法を使ったために不適切な推定をする可能性がある

最尤法により様々な確率モデルを考えることが可能となったが、そのため不適切なモデルを使用する危険性もある。

⑤最尤推定量が不偏推定量とならないことがある

分散の最尤推定量が不偏推定量となっていないのは既知の事実であるが、類似したことは時々起こる。例えば、DeLury法で2項分布の尤度を用いた場合のNとqの最尤推定量は不偏推定量となっていない(Schnute, 1983)。

①の問題については、使いやすい最適化のプログラムが作られつつあり、近い将来に解消されることが期待されている。現時点ではまだ手軽に使えるものは無く、特に複数の極値を持つ場合の処理は問題点として残っている。今回の解析では、収束は遅いが比較的使いやすいシプレックス法のプログラムを用い、得られた最尤推定値の妥当性は初期値を変えることなどによりチェックした。②と③については最尤法による推定が広まるにつれ状況が変わってくることを希望する。第I章でも述べたように最尤法による論文は多くなってきており、やさしい入門書の出版が待たれる。④は大きな問題ともなり得るが、線形最小2乗法による従来のモデルとの比較を必ず行うことにより、克服することができる。可能な場合には、適合度検定を行っておくことが望ましい。実際のデータはモデルの前提条件を完全に満たしていないと考えることが重要である。⑤については、不偏推定量を求める努力は必要であるが、偏りが大きくない場合には神経質になる必要はないと考えられる。

### VII-3 展望(おわりに)

第I章でも述べたように水産資源解析学では線形モデルから非線形モデルへ、最小2乗法から最尤法への大きな転換が見られる。従来の線形最小2乗法では、モデルを未知のパラメータについて線形になるよう変形したり、近似したりすることに力が注がれてきた。このため、必ずしも現象に即していないモデルが用いられることがあり、本質的には同じでも未知のパラメータのわずかな違いにより、全く異なった方法として扱われることがあった。非線形最適化プログラムを活用した最尤法によれば、未知のパラメータはデータ発生確率モデルから直接求めることができ、AICにより異なった種類のモデルも統一的に比較検討することが可能である。

「計算しやすいモデル」を優先していたこれまでの状況から、今後は「現実に即したモデル」の使用が優先され、従来の方法や考え方にとらわれないフレキシブルな推定が可能になると考えられる。

## 摘 要

(1)水産資源解析では、誤差や確率変動を含むデータからパラメータや関係式を推定する必要がある。こ

のため適切な統計学的手法の適用が不可欠である。本研究では最尤法によるパラメータ推定とモデル選択の方法を検討した。

(2)最尤法ではデータの発生確率に相当する尤度関数を考え、与えられたデータの下で尤度を最大にするパラメータを推定値とする。

(3)モデル選択はAICに拠り行うことができる。AIC最小のモデルが最適なモデルとなる。

(4)最尤推定量の統計学的な性質としては、一致性・漸近有効性・漸近不偏性などが挙げられる。有限のサンプルでは必ずしも不偏性は保証されていない。

(5)従来から良く用いられている最小2乗法（回帰式）は、データが理論式のまわりに正規分布でばらつくというモデルである。従って最尤法の一つと考えることができる。

(6)最尤法による解析例として、再生産式の推定・網目選択曲線の推定・標識再捕法・DeLury法をとり挙げた。

(7)再生産式を、従来の線形回帰に相当するモデルを含む幾つかのモデルで推定した。推定結果はモデルにより大きく異なった。計算の容易な従来のモデルが必ずしも適切ではない場合がある。

(8)網目選択曲線の推定ではデータの発生機構をとり入れたモデルを用いることにより、データのばらつき等を考慮した推定を行った。さらに選択曲線が目合の関数として表わされるという仮定の妥当性を吟味した。

(9)従来の標識再捕法では対数正規モデルと多項分布モデルが用いられてきた。この両者を比較し、さらに新しいモデルについて検討を加えた。最適なモデルはデータにより異なっている。

(10)DeLury法では第1モデルと第2モデル、2項分布モデル及び新しく考えた正規分布モデル等の比較を行った。実例ではDeLuryの第1モデルまたは第2モデルは比較的適切なモデルとなっているが、2項分布モデルは標準誤差を過小評価する危険性があるため注意が必要である。

(11)最尤法の長所としては、データの発生機構を自動的にとりこんだ推定が可能であること、モデル作りの柔軟性が高く最小2乗法では推定できないような様々なモデルを考えることができること、それらのモデルを統一的に比較できること等が挙げられる。

(12)最尤法の短所としては、計算が難しいこと、最尤推定量が必ずしも不偏推定量となっていないこと、不適切なモデルを使用する可能性があること等が挙げられる。

(13)従来は計算の容易なモデルが使用されていたが、今後はより現実に即したモデルの使用が最優先されるものと考えられる。

## 謝 辞

本研究を取りまとめるにあたり、懇切な御指導と御校閲を賜った東京大学農学部教授清水誠博士に深く感謝する。御校閲と有益な御教示を賜った東京大学海洋研究所教授石井丈夫博士、並びに東京大学農学部助教授上村賢治博士、同助教授谷内透博士に感謝申し上げる。本研究にとりくむ契機を与えられ、最尤法の適用に関して多くの御助言をいただいた東京大学海洋研究所助教授岸野洋久博士に心から感謝する。三重大学生物資源学部教授松宮義晴博士には、最尤法の水産資源解析への応用に関して御助言いただくと共に詳細な御校閲を賜った。厚くお礼申し上げます。本研究を通して数々の御助言をいただくと共に、詳細な御校閲を賜った日本栽培漁業協会調査課長北田修一博士に感謝する。

## 文 献

- AKAIKE, H. 1973 : Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. 2nd Inter. Symp. on Information Theory (Prtrov, B. N. and Csáki, F. eds.), 267-281, Akadémiai Kiadó, Budapest.
- 赤嶺達郎 1986 : 再生産曲線のパラメータ推定. 日水研連絡ニュース, 337, 2-4.
- AKAMINE, T. 1990 : An interval estimation of Leslie's method in removal methods. *Bull. Japan Sea Natl. Res. Fish. Inst.*, 40, 27-49.
- AKAMINE, T., KISHINO, H., and HIRAMATSU, K. 1992 : Non-biased interval estimation of Leslie's removal methods. *Bull. Japan Sea Natl. Res. Fish. Inst.*, 42, 25-39.
- CHAMBERS, R. C. and LEGGETT, W. C. 1989 : Event analysis applied to timing in marine fish ontogeny. *Can. J. Fish. Aquat. Sci.*, 46, 1633-1641.
- CUSHING, D. H. 1973 : Dependence of recruitment of parent stock. *J. Fish. Res. Bd. Can.*, 30, 1965-1976.
- EFRON, B. 1982 : The jackknife, the bootstrap and other resampling plans. CBMS-NSF Regional Conference Ser. in Applied Math., 38, 92pp.
- FAREBROTHER, R. W. 1985 : Weighted least-squares estimates of mortality rates from single-release tagging studies. *J. Cons. int. Explor. Mer*, 42, 166-170.
- FAREBROTHER, R. W. 1988 : Maximum likelihood estimates of mortality rates from single-release tagging studies. *J. Cons. int. Explor. Mer*, 44, 229-234.
- FOURNIER, D. A., SIBERT, J. R., MAJKOWSKI, J., and HAMPTON, J. 1990 : MULTIFAN a likelihood-based method for estimating growth parameters and age composition from multiple length frequency data sets illustrated using data for Southern Bluefin Tuna (*Thunnus maccoyii*). *Can. J. Fish. Aquat. Sci.*, 47, 301-317.
- GOMULKIEWICZ, R., BRODZIAK, J. K., and MANGEL, M. 1990 : Ranking loci for genetic stock identification by curvature methods. *Can. J. Fish. Aquat. Sci.*, 47, 611-619.
- GULLAND, J. A. 1955 : On the estimation of population parameters from marked members. *Biometrika*, 42, 269-270.
- GULLAND, J. A. 1983 : Fish stock assessment. A manual of basic methods, FAO/Wiley Series on Food and Agriculture, 1, 223pp., John Wiley & Sons, New York. (川崎 健訳, 1990 : 水産資源解析入門. 288 pp., 恒星社厚生閣, 東京.)
- HILBORN, R. 1990 : Determination of fish movement patterns from tag recoveries using maximum likelihood estimators. *Can. J. Fish. Aquat. Sci.*, 47, 635-643.
- 平松一彦 1990 a : 論文に見る外国の水産資源解析学の現状. 水産海洋研究, 54, 83-87.
- 平松一彦 1990 b : 最尤法によるコホート解析・標識再捕法・DeLury法の統一的扱い. 漁業資源研究会議西日本底魚部会報, 18, 13-26.
- HIRAMATSU, K. and KISHINO, H. 1989 : Stock identification by maximum likelihood method : Derivation of variance estimator. Document submitted to the Annual Meeting of the

- International North Pacific Fisheries Commission, Seattle, U. S. A. November 1989, 13pp.
- HIRAMATSU, K. and KITADA, S. 1991 : Model selection of single release tagging studies : The effect of natural mortality. *Nippon Suisan Gakkaishi*, 57, 977.
- 石岡清英・猪子嘉生 1982 : Cohortの漁獲統計が得られる場合の初期資源量の推定方法—江田島湾のガザミを例として. 南西水研報, 14, 33-54.
- KIRKWOOD, G. P. and WALKER, T. I. 1986 : Gill net mesh selectivities for gummy shark, *Mustelus antarcticus* Günther, taken in south-eastern Australian waters. *Aust. J. Mar. Freshw. Res.*, 37, 689-697.
- 北田修一 1989 : 標識再捕時間に基づく死亡係数の推定, 最近における理論展開と実際の解析上の問題. 栽培技研, 18, 145-161.
- 北田修一・平野勝臣 1987 : 期間毎の標識再捕データに基づく死亡係数の推定について. 日水誌, 53, 1768-1770.
- KITADA, S. and SHIOTA, K. 1990 : Estimation of mortality rates of female swimming crab *Portunus trituberculatus* MEIRS from single-release marking studies. *Nippon Suisan Gakkaishi*, 56, 1449-1453.
- KITAHARA, T., TAKAHASHI, K., HUJIKAWA, Y., ISHIDA, K., and YOSHIO, J. 1986 : Estimation of fishing mortality coefficient from tag recoveries in a finite period with a few closed seasons. *Nippon Suisan Gakkaishi*, 52, 579-584.
- 小島 博・石橋喜美子 1985 : 徳島県海部郡産クロアワビの資源特性値の推定. 東海水研報, 118, 11-20.
- LEWY, P. 1988 : Integrated stochastic virtual population analysis: Estimates and their precision of fishing mortalities and stock sizes for the North Sea whiting stock. *J. Cons. int. Explor. Mer*, 44, 217-228.
- MARGETTS, A. R. 1954 : Selection of soles by the mesh of trawls. *J. Cons. int. Explor. Mer*, 20, 276-289.
- MATSUMIYA, Y. 1990 : AIC introduced to Schnute's models by the removal method. *Nippon Suisan Gakkaishi*, 56, 543.
- MILLAR, R. B. 1987 : Maximum likelihood estimation of mixed stock fishery composition. *Can. J. Fish. Aquat. Sci.*, 44, 583-590.
- 蓑谷千風彦 1988 : 推定と検定のはなし. 292 pp., 東京図書, 東京.
- MORAN, P. A. P. 1951 : A mathematical theory of animal trapping. *Biometrika*, 38, 307-311.
- 日本栽培漁業協会 1988 : 日本栽培漁業協会事業年報昭和61年度. 326-327, 日本栽培漁業協会, 東京.
- 能勢幸雄 1959 : DeLuryの資源量推定法の推定値に対する信頼区間について. 日水誌, 25, 953-956.
- 能勢幸雄・石井丈夫・清水 誠 1988 : 水産資源学. 217 pp., 東京大学出版会, 東京.
- 奥村晴彦 1986 : パソコンによるデータ解析入門. 244 pp., 技術評論社, 東京.
- PAULIK, G. J. 1963 : Estimates of mortality rates from tag recoveries. *Biometrics*, 19, 28-57.

- POLOVINA, J. J. 1986 : A variable catchability version of the Leslie model with application to an intensive fishing experiment on a multispecies stock. *Fish. Bull.*, 84, 423-428.
- RICHARDS, L. J. and SCHNUTE, J. T. 1990 : Use of a general dose-response model for rockfish fecundity-length relationship. *Can. J. Fish. Aquat. Sci.*, 47, 1148-1156.
- 坂元慶行・石黒真木夫・北川源四郎 1983 : 情報量統計学. 236 pp., 共立出版, 東京.
- SANDLAND, R. L. 1982 : Estimation, inference, and data analysis for log-linear regression models in tagging studies. *J. Cons. int. Explor. Mer.*, 40, 291-303.
- SCHNUTE, J. 1983 : A new approach to estimating populations by the removal method. *Can. J. Fish. Aquat. Sci.*, 40, 2153-2169.
- SCHNUTE, J. T., RICHARDS, L. J., and CASS, A. J. 1989 : Fish growth : Investigations based on a size-structured model. *Can. J. Fish. Aquat. Sci.*, 46, 730-742.
- SEBER, G. A. F. 1982 : The estimation of animal abundance and related parameters. 2nd edit., 654pp., Griffin, London.
- SHEPHERD, J. G. 1982 : A versatile new stock-recruitment relationship for fisheries, and the construction of sustainable yield curves. *J. Cons. int. Explor. Mer.*, 40, 67-75.
- SPARHOLT, H. 1990 : A stochastic integrated VPA for herring in the Baltic Sea using acoustic estimates as auxiliary information for estimating natural mortality. *J. Cons. int. Explor. Mer.*, 46, 325-332.
- 田口喜三郎 1965 a : アラスカにおけるサケ・マス (*Oncorhynchus* spp.) の再生産状態について-I. カラフトマス (*O. gorbuscha*). 日水誌, 31, 957-963.
- 田口喜三郎 1965 b : アラスカにおけるサケ・マス (*Oncorhynchus* spp.) の再生産状態について-II. サケ (*O. keta*). 日水誌, 31, 964-970.
- 竹内 啓編 1989 : 統計学辞典. 1185 pp., 東洋経済新報社, 東京.
- TANAKA, S. 1967 : Estimation of fishing coefficient of mojako by tagging experiments on drifting seaweeds- I. Method and an example. *Nippon Suisan Gakkaishi*, 33, 1108-1115.
- 田中昌一 1985 : 水産資源学総論. 381 pp., 恒星社厚生閣, 東京.
- TOKAI, T. and KITAHARA, T. 1989 : Method of determining the mesh selectivity curve of trawl net. *Nippon Suisan Gakkaishi*, 55, 643-649.
- WELCH, D. W. and FOUCHER, R. P. 1988 : A maximum likelihood methodology for estimating length-at-maturity with application to Pacific cod (*Gadus macrocephalus*) population dynamics. *Can. J. Fish. Aquat. Sci.*, 45, 333-343.
- WOOD, C. C., MCKINNELL, S., MULLIGAN, T. J., and FOURNIER, D. A. 1987 : Stock identification with the maximum-likelihood mixture model : Sensitivity analysis and application to complex problems. *Can. J. Fish. Aquat. Sci.*, 44, 866-881.
- ZIPPIN, C. 1956 : An evaluation of the removal method of estimating animal populations. *Biometrics*, 12, 163-189.

## 付録 (2.20) 式と (2.22) 式の同等性の証明

第II章の (2.20) 式

$$f(Y) = \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2} |\Omega|^{1/2}} \exp \{ -(Y-NP)\Omega^{-1}(Y-NP)^t \} \quad (\text{A.1})$$

ここで,

$$P = (p_1, \dots, p_{n-1})$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} Np_1(1-p_1) & \cdots & -Np_1p_{n-1} \\ -Np_2p_1 & \cdot & \vdots \\ \vdots & \cdot & \vdots \\ -Np_{n-1}p_1 & \cdots & Np_{n-1}(1-p_{n-1}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

と (2.22) 式

$$f(Y) = \frac{1}{(2\pi N)^{(n-1)/2} \{ \prod p_i (1 - \sum p_i) \}^{1/2}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(y_i - Np_i)^2}{Np_i} - \frac{(\sum y_i - N\sum p_i)^2}{2N(1 - \sum p_i)} \right\} \quad (\text{A.3})$$

の同等性を証明する。以下の式において、和 $\Sigma$ および積 $\Pi$ はすべて  $i$  につき 1 から  $n-1$  までであるので、これを示す添字を省略する。

まず (A.1) 式の分母を考える。 $\Omega$  の行列式は次のようになる。

$$|\Omega| = N^{n-1} \Pi p_i \begin{vmatrix} 1-p_1 & -p_1 & \cdots & -p_1 \\ -p_2 & 1-p_2 & \cdots & -p_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -p_{n-1} & -p_{n-1} & \cdots & 1-p_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= N^{n-1} \Pi p_i \begin{vmatrix} 1-p_1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -p_2 & 1 & 0 & & \\ \cdot & 0 & 1 & & 0 \\ \cdot & & & \cdot & \\ \cdot & & & & \cdot \\ -p_{n-1} & 0 & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$= N^{n-1} \Pi p_i (1 - \sum p_i). \quad (\text{A.4})$$

よって (A. 1) 式の分母は

$$(2\pi)^{(n-1)/2} |\Omega|^{1/2} = (2\pi N)^{(n-1)/2} \{\prod p_i (1 - \sum p_i)\}^{1/2} \tag{A. 5}$$

となつて (A. 3) 式の分母と一致する。

次に (A. 1) 式の指数関数の部分について考える。 $\Omega$ の逆行列の各要素は次のようになる。

$$(\Omega^{-1})_{ij} = |\Omega|^{-1} \Delta_{ji}. \tag{A. 6}$$

ここで $\Delta_{ji}$ は行列 $\Omega$ の余因子

$$\Delta_{ji} = (-1)^{j+i} N^{n-2} \begin{vmatrix} p_1(1-p_1) & \cdots & -p_1 p_{i-1} & -p_1 p_{i+1} & \cdots & p_1 p_{n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -p_{j-1} p_1 & \cdots & -p_{j-1} p_{i-1} & -p_{j-1} p_{i+1} & \cdots & -p_{j-1} p_{n-1} \\ -p_{j+1} p_1 & & -p_{j+1} p_{i-1} & -p_{j+1} p_{i+1} & \cdots & -p_{j+1} p_{n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -p_{n-1} p_1 & \cdots & -p_{n-1} p_{i-1} & -p_{n-1} p_{i+1} & \cdots & p_{n-1}(1-p_{n-1}) \end{vmatrix} \tag{A. 7}$$

である。

(1)  $i > j$  の場合

$$\Delta_{ji} = (-1)^{j+i} N^{n-2} \frac{1}{p_i} \prod p_i \times$$

$$\begin{vmatrix} 1-p_1 & -p_1 & \cdots & & & -p_1 \\ -p_2 & 1-p_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1-p_{j-1} & & \\ & & & & -p_{j+1} & 1-p_{j+1} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ & & & & p_{i-1} & 1-p_{i-1} \\ & & & & & p_i \\ & & & & & & 1-p_{i+1} \\ & & & & & & & \ddots \\ -p_{n-1} & & & & & & & & 1-p_{n-1} \end{vmatrix}$$





$$= -N^{n-2} \frac{1}{p_i} \Pi p_i \times \begin{vmatrix} 1 - \sum p_i + p_j & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -p_2 & 1 & & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & & \\ \vdots & & & 1 & & & & 0 \\ -p_i & & & & 0 & & & \\ \vdots & & & & & 1 & & \\ -p_{n-1} & 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$= N^{n-2} \frac{1}{p_i} \Pi p_i \times \begin{vmatrix} -p_i & & & & & & & \\ -p_2 & 1 & & & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & & \\ \vdots & & & 1 & & & & \\ 1 - \sum p_i + p_j & & & & -1 & & & \\ \vdots & & & & & 1 & & \\ \vdots & & & & & & \ddots & \\ -p_{n-1} & 0 & & & & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$= N^{n-2} \Pi p_i. \tag{A. 8}$$

(2)  $i = j$  の場合

$$\Delta_{ji} = N^{n-2} \frac{1}{p_i} \Pi p_i \times \begin{vmatrix} 1 - p_1 & -p_1 & & \cdots & & -p_1 \\ -p_2 & 1 - p_2 & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ \vdots & & & 1 - p_{i-1} & & \\ & & & & 1 - p_{i+1} & \\ & & & & & \ddots & \\ -p_{n-1} & & & & & & 1 - p_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= N^{n-2} \frac{1}{p_i} \prod p_i \begin{vmatrix} 1-p_1 & -1 & \cdots & -1 \\ -p_2 & 1 & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdot & \vdots \\ -p_{n-1} & 0 & \cdot & 1 \end{vmatrix} \\
&= N^{n-2} \frac{1}{p_i} \prod p_i \begin{vmatrix} 1-\sum p_i + p_i & 0 & \cdot & 0 \\ -p_2 & 1 & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \cdot & \cdot \\ -p_{n-1} & 0 & \cdot & 1 \end{vmatrix} \\
&= N^{n-2} \frac{1}{p_i} \prod p_i (1-\sum p_i + p_i). \tag{A.9}
\end{aligned}$$

$i < j$  の場合も  $i > j$  と同様に扱うことができる。従つて

$$(\Omega^{-1})_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{Np_i} + \frac{1}{N(1-\sum p_i)} & i = j \\ \frac{1}{N(1-\sum p_i)} & i \neq j. \end{cases} \tag{A.10}$$

よつて (A.1) 式の指数関数の中は

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}(Y-NP)\Omega^{-1}(Y-NP)^t \\
&= -\frac{1}{2}(Y-NP) \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{Np_i} & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \frac{1}{Np_{n-1}} \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{N(1-\sum p_i)} \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \right\} (Y-NP)^t \\
&= -\frac{1}{2} \sum \frac{(y_i - Np_i)^2}{Np_i} - \frac{(\sum y_i - N\sum p_i)^2}{2N(1-\sum p_i)} \tag{A.11}
\end{aligned}$$

となり、これは (A.3) 式の対応する部分と等しい。よつて (A.4) 式および (A.11) 式より、(A.1) 式と (A.3) 式の同等性が証明された。