遠洋水研報　第27号　平成2年3月
Bull. Nat. Res. Inst. Far Seas Fish., No. 27, March 1990

シングルコホート解析の信頼性に関する最近の研究

平　松　一　彦*

A review on current investigation of the accuracy of single cohort analysis

Kazuhiko HIRAMATSU*

Abstract

Virtual Population Analysis or Cohort Analysis is widely used in fish stock assessment. The accuracy of this method has recently been investigated by the sensitivity analysis and the delta method. This paper reviews and compares these studies. The sensitivity analysis is used for the bias estimates and the delta method is used for the variance estimates. It is suggested that the error variances should be presented with stock size estimates using the delta method.

は　じ　め　に

シングルコホート解析は，年齢別漁獲尾数から資源尾数を推定する方法として，20年以上にわたり種々の魚種に対して用いられている。これらの計算はいわゆる芋づる式であって，データとパラメータが与えられれば推定値は一意的に決まり，統計的推定ではない。このため，これだけでは推定値の精度については全く不明であり，得られた数値をどこまで信頼してよいかはわからない。他方，解析にあたって取り扱うデータやパラメータは大きな誤差を伴うものが多く，これらの誤差が推定値に及ぼす影響を評価しておくことが不可欠である。シングルコホート解析における推定値の信頼性をみるために，現在用いられている主な方法としては次の2つがある。

(1)　誤差の代入によるバイアスの推定

入力データもしくはパラメータXに誤差δXを付けたし，それが推定値に及ぼす影響をみる。(以下感度解析法と呼ぶ)

(2)　デルタ法による分散の推定

入力データおよびパラメータの分散を仮定し，デルタ法を用いて推定値の分散を求める。

これらの方法は，いずれもシングルコホート解析の信頼性の研究のはしりといえるPope (1972) で既に用いられているが，よりシステマテックに信頼性の検討が行われるようになったのは，1980年代後半のことである。

1989年11月1日受理　遠洋水産研究所業績　第262号
* 遠洋水産研究所（National Research Institute of Far Seas Fisheries ; 7-1, Orido 5 chome, Shimizu-shi, SHIZUOKA, 424 JAPAN）

本論文では，シングルコホート解析による推定資源尾数の信頼性に関する最近の研究について比較検討し，それぞれの手法の評価を行う。

シングルコホート解析

シングルコホート解析は，努力量を用いずに各年齢時における漁獲屋数C_iから資源尾数N_iを推定する方法であり，種々の方法が考えられている（Megrey，1988）。このうち一般的に用いられているものとしては，各時間間隔i（通常は１年）において漁獲係数F_iが一定であると仮定する方法（Gulland，1965：以下VPA法と呼ぶ）と，時間間隔の中間でパルス的な漁業を仮定する方法（Pope，1972：以下Pope法と呼ぶ）がある。いずれもデータとしてC_i（$i=0,\cdots,t$），パラメータとして自然死亡係数M，最高年齢の漁獲係数F_tを与え，以下の基本式を用いて資源尾数N_i（$i=0,\cdots,t$）を推定する。

① VPA法の基本方程式

$$N_i = N_{i+1}\exp(F_i + M) \tag{1}$$

$$C_i = N_i \frac{F_i}{F_i + M}(1 - \exp(-(F_i + M))) \tag{2}$$

② Pope法の基本方程式

$$N_i = N_{i+1}\exp(M) + C_i\exp\left(\frac{M}{2}\right) \tag{3}$$

ただし，最高年齢の資源尾数N_tについては

$$N_t = \frac{C_t(F_t + M)}{F_t\{1 - \exp(-(F_t + M))\}} \tag{4}$$

または

$$N_t = \frac{C_t(F_t + M)}{F_t} \tag{5}$$

によって計算する。(5)式はt歳以降はもはや漁獲物としては出現しない場合，あるいはt歳以降の漁獲物を便宜的にt歳の段階にまとめた場合に用いる。

VPA法では(2)式より反復計算等によりF_iを求め，それを(1)式に代入することになる。推定値N_iは入力値C_i，M，F_tを用いてあらわな形には書くことが出来ない。一方，Pope法ではN_iは入力値を使って

$$N_i = \sum_{j=i}^{t-1} C_j\exp\{M(j - i + \frac{1}{2})\} + N_t\exp\{M(t - i)\} \tag{6}$$

と表すことができる。このため以下述べるように，Pope法における誤差の検討はVPA法に比べ容易である。なお，一般にPope法はVPA法を近似したものとみなされているが（石岡・岸田，1985），上述のようにVPA法はF一定の漁業を，Pope法は中間でパルス的な漁業を仮定しているわけで，一方がより基本的であるというようなことはないと考えられる（Hiramatsu，1990）。

これらの入力値となるC_i，M，F_tはいずれも正確に求まらないため，推定値N_iもかなり大きな誤差を持つことが予想される。しかし，シングルコホート解析では未知数と方程式の数が等しいため，解は一意的に求まり，そのままでは推定値の誤差を評価することはできない。そこで推定値の信頼性の検討のためには，以下述べるような方法が使われる。

感度解析法によるバイアスの推定

入力値Xが与えられたとき，推定値NはN＝f(X)で求まるとする。このときXの誤差δXによるNの影響を評価するには，$\hat{X}=\bar{X}+\delta X$を代入しNの変化δNをみればよい。ここで$\bar{N}$，$\bar{X}$は真の値，$\hat{N}$，$\hat{X}$は誤差を含んだ値を示す。

$$\begin{aligned}\hat{N}&=\bar{N}+\delta N\\&=f(\hat{X})\\&=f(\bar{X}+\delta X)\end{aligned}\tag{7}$$

または，相対誤差の形にして，

$$\frac{\delta N}{\bar{N}}=\frac{f(\bar{X}+\delta X)-f(\bar{X})}{f(\bar{X})}\tag{8}$$

一般にNはXについて複雑な関数となるため，この計算は具体的な数値を与えて行われるか近似式が用いられることが多い。

この方法により誤差の評価を行ったものとして，Pope (1972)，Ulltang (1977)，Sims (1982)，Sims (1984)，Sampson (1988) がある。

Pope (1972) はF_tの誤差の影響を検討するのに以下の方法を用いている。

$$\rho(N_i)\equiv\frac{\delta N_i}{\bar{N}_i}$$

として(3)式より

$$\delta N=\delta N_{i+1}\exp(\bar{M})$$

よって

$$\begin{aligned}\rho(N_i)&=\frac{\delta N_{i+1}\exp(\bar{M})}{\bar{N}_i}\\&=\frac{\delta N_{i+1}\exp(\bar{M})}{\bar{N}_{i+1}\exp(\bar{F}_i+\bar{M})}\\&=\rho(N_{i+1})\exp(-\bar{F}_i)\\&=\rho(N_t)\exp\left(\sum_{j=i}^{t-1}\bar{F}_j\right)\end{aligned}\tag{9}$$

したがって，F_tの誤差によるN_iの相対誤差は，若齢魚になるほど，また漁獲係数が大きいほど小さくなることがわかる。なお，Pope (1972) では(9)式の漁獲係数は誤差を含んだ$\hat{F}$となっていたが，Siddeek (1982) により真の値$\bar{F}$に修正された。

Ulltang (1977) は主にMの誤差の影響について，実際に数値を代入して検討を行っている。Mに正または負のバイアスがある場合には，推定されるFはほぼ同じ大きさで符号が逆のバイアスをもち，NはMと同じ符号のバイアスを持つが，相対的な変動はほぼ正しくとらえられるとしている。また，Mに年変動のある場合には，変動がランダムであればF，Nの誤差は小さいが，年や年齢によってある傾向をもって変化している場合には一定のMを仮定して計算を行うと，その影響はFにMと同じ傾向を持った誤差として現れてくるとしている。さらに，UlltangはMやFに季節変化がある場合についても検討し，これによる誤差は小さく無視できるとしている。

２章で述べたように，VPA法の場合にはタイムステップ内（通常は１年間）でF一定の漁業を，Pope

法の場合には中間でパルス的な漁業を仮定している。しかし，現実の漁業はこれらから外れるため誤差が生じる。Sims (1982) は漁業が期間内でかたよって行われる場合の影響を，Popeの式を用いて感度解析法により評価した。相対誤差をみることにより，強い漁獲が期間の初めまたは終わりに集中的に行われかつMが大きい時，誤差が非常に大きくなるとしている。

Sims (1982) はこれをかなり繁雑な式を導いて行っているが，これは(3)式を見れば明らかである。正負の誤差の上限は，期間の初めと終わりにパルス的な漁業ある場合で，このとき正しい式はそれぞれ

$$N_i = N_{i+1}\exp(M) + C_i$$

$$N_i = N_{i+1}\exp(M) + C_i\exp(M)$$

となり，これと(3)式との差$\pm C_i\exp(M)/2$が誤差となる。このときMが大きいほど，またC_iが大きいほど誤差は大きくなる。

またSims (1984) はMに誤差がある場合の影響を，やはりPopeの式を用いて感度解析法により，解析的およびシミュレーションにより評価した。Mについて線形近似を行うことにより，相対誤差の近似的な関係式として

$$\rho(N_i) = \exp(-\bar{F}_i)\rho(N_{i+1}) + (1-\exp(\bar{F}_i))\ \delta M/2 \tag{10}$$

が得られる。これからFが小さくかつMを過大評価した場合には，誤差は非常に大きくなるとしている。

Sampson (1988) は感度解析法によりC，M，F_tの３つの誤差による影響を同時に扱い，VPA法においててN_iの相対誤差が増加しない条件

$$|\rho(N_i)| \leqq |\rho(N_{i+1})| \tag{11}$$

をM，F，$\rho(M)$，$p(C_i)$，$\rho(N_{i+1})$を変えて調べている。途中複雑な式変形を行っているが，基本的には$\rho(N_i)$を近似を用いてM，F，$\rho(M)$，$\rho(C_i)$，$\rho(N_{i+1})$の関数として表し，(11)式の条件を満たす領域を図示している（Sampson (1988) のFig. 4 -a， 4 -bの斜線の部分）。Pope (1972) のようにF_tの誤差のみを考えた場合は(9)式のようになり相対誤差は減少するが，同時にCやMの誤差も考慮すると，必ずしも相対誤差は減少すると限らず，増加する場合もあることがこの図からわかる。

デルタ法による分散の推定

デルタ法 (Seber，1982) の基本的な考え方自体は，感度解析法とそれほど大きな差は無い。(7)式の右辺を，Xの真の値（あるいは平均値）を$\bar{X}$として，$\bar{X}$について１次まで展開する。

$$\hat{N} \fallingdotseq f(\bar{X}) + \frac{df(\bar{X})}{dX}\delta X \tag{12}$$

この近似のもとでNの分散は

$$V\ [\hat{N}] = \left(\frac{df(\bar{X})}{dX}\right)^2 V\ [\hat{X}] \tag{13}$$

となる（Appendix参照）。したがってXの分散がわかっていればNの分散を求めることが出来る。

さらに，一般にNがX_1，X_2，・・・，X_nの関数であれば，

$$V\ [\hat{N}] = \sum_i \left(\frac{\partial f(\bar{X})}{\partial X_i}\right)^2 V\ [\hat{X}_i] + \sum_{i,j} \frac{\partial f(\bar{X})}{\partial X_i}\ \frac{\partial f(\bar{X})}{\partial X_j}\ \mathrm{Cov}\ [\hat{X}_i,\ \hat{X}_j] \tag{14}$$

となる。

この方法により誤差の評価を行ったものとして，Pope(1972)，Saila *et al.*(1985)，Sampson(1987)，Prager and MacCall (1988) がある。

Pope（1972）はC_iの誤差による影響を評価するのにこの方法を用いている。

C，M，F_tのすべての入力値の誤差による影響を考慮したのはSaila *et al*.（1985）が最初である。(6)式より

$$N_i = f(C_i, \cdot\cdot\cdot, C_t, M, F_t)$$

であるから，(14)式を用いて

$$V[\hat{N}_i] \fallingdotseq \sum_{j=i}^{t}\left(\frac{\partial f}{\partial C_j}\right)^2 V[\hat{C}_j] + \left(\frac{\partial f}{\partial M}\right)^2 V[\hat{M}] + \left(\frac{\partial f}{\partial F_t}\right)^2 V[\hat{F}_t] \tag{15}$$

となる。ここでC，M，F_t間の誤差は独立であり共分散が0であることを仮定した(なお，各項の具体的な形についてはAppendixを見よ)。Saila *et al*.（1985）はこの式を用いて各誤差要因の大きさの検討を行っているが，具体的な数値を代入して計算していないため，論文中の記述には必ずしも適切とはいえない部分もある。

デルタ法を用いてより詳しい解析を行ったのはSampson（1987）である。実際に数値を仮定して計算した結果，推定値の変動係数(＝標準偏差／平均値)は入力値C，M，F_tの変動係数とほぼ同じオーダーになるとしている。なお，Sampson（1987）はVPAの式に対してデルタ法を用いているが，この場合N（およびF）はC，M，F_tのみの関数として書けないため，解析は複雑となる(詳しくはSampson（1987）のAppendix参照。ただし3か所ほど誤植がある)。

デルタ法は(12)式から明らかなように，本来非線形な誤差の影響を線形近似により評価しようとするものである。このため誤差が大きくなるほど近似の精度は悪くなる。Sampson（1987）はモンテカルロシミュレーションによりデルタ法の精度の検討を行い，デルタ法で得られた分散の推定値は負のバイアスを持つこと，すなわち過小評価となっていること示した。シミュレーションによれば，各入力値の変動係数が25%のとき，デルタ法によって求められた推定値の変動係数は10%－20%の過小評価，入力値の変動係数が75%のときは20%—40%の過小評価である。これからSampson（1987）は各入力値の変動係数が25%程度であれば，デルタ法でも十分な精度で評価が可能であるとしている。ただし，これらのシミュレーションはM＝0.2の場合であり，それ以外のMの場合にも定性的には正しいと考えられるが，定量的には明らかではない。

Prager and MacCall（1988）はPopeタイプの式にデルタ法を適用し，体重の誤差も考慮に入れることにより，バイオマスの近似的な95%信頼区間を求めている。Pragerら（1988）は各入力値の誤差の大きさと，各誤差の推定値への影響についてかなり詳しく検討している。入力値の誤差については，例えば年齢別漁獲尾数の誤差（分散）は，その年の全漁獲尾数の推定誤差と年齢組成に分ける時の誤差に分解して考えている。また推定値の誤差にどの入力値が影響するかを評価することにより，漁獲率が低い場合には自然死亡係数Mが，漁獲率が高い場合には漁獲尾数Cが重要となってくるとしている。

論　　議

本論文で検討したコホート解析の誤差に関する研究をまとめると表1のようになる。基本的な方法は既にPope（1972）により用いられているが，近年C，M，F_tの3つの誤差要因を同時にとりこんだ，よりシステマチックな検討が行われている。

これら2つの方法はそれぞれ一長一短があり，目的により使い分ける必要があろう。大まかにいえばバイアスを評価するのであれば感度解析法，分散を評価するのであればデルタ法ということになる。例えば，Hidén（1988）はコホート解析におけるMの誤差による推定資源尾数のバイアスが，資源量—加入

Table 1. Summary of recent studies for the accuracy of single cohort analysis.

Main author	Method of analysis Souces of errors C	M	F_t	Equation
Pope (1972)	D		S	Pope
Ulltang (1977)	S	S		VPA
Sims (1982)	S			Pope
Sims (1984)		S		Pope
Saila (1985)	D	D	D	Pope
Sampson (1987)	D	D	D	VPA
Sampson (1988)	S	S	S	VPA
Prager (1988)	D	D	D	Pope type

S : Sensitivity analysis, D : Delta method

量関係をみる場合にどのような影響をもたらすかを，感度解析法を用いて検討している。

一般に，シングルコホート解析により資源尾数を推定した場合，結果は４～５桁程度求められていることが多い。また精度に関しては，F_t及びMについてこれらの値を幾つか変えて代入し，推定値の変化をみるといったことが行われている(例えば日高ほか，1989；島本，1987)。これは具体的な数値を入れた感度解析法を用いていることに相当する。しかし，これだけではCの誤差について無視していることになり，また，推定精度もはっきりしない。そこで，さらにデルタ法を用いて，推定値に分散あるいは標準誤差を付けておくことが望まれる。デルタ法の精度を上げるのであれば，Prager and MacCall (1988) のようにかなり細かくデータの質や分散の原因について考慮する必要があるが，簡便に行うにはPopeの式を用いて入力値間の共分散を０と仮定する，(A３)，(A４)式を用いれば十分であろう。C，M，F_tについて尤もらしい変動係数が推定できることが望ましいが，それが不可能な場合には，適当な値を仮定して求めても推定値のおおよその信頼性，すなわち何桁まで信頼できるのかといった点や，年齢や年による誤差の大きさの違いを評価することができよう。この場合もちろん入力値の変動係数としてどのような値を仮定したのかは明記しておくことが必要である。

実例として，島本 (1987) のマダイのデータにデルタ法を適用した結果を表２に示す。標準誤差の計算には（A３)，(A４) 式を用い，C，M，F_tの変動係数として20%を仮定してある。

またデルタ法において(15)式の

$$\left(\frac{\partial f}{\partial C_j}\right)^2,\ \left(\frac{\partial f}{\partial M}\right)^2,\ \left(\frac{\partial f}{\partial F_t}\right)^2$$

といった項をみることにより各誤差要因の大きさの評価が可能である。これは推定精度の向上をめざす上での指標となろう。

なお，ここで考えているのはあくまで入力値の誤差のみであり，(1)，(2)式や(3)式からの誤差（プロセス誤差)，例えば移入や移出といったモデルの前提条件を崩すような誤差の影響は考慮されていない。このため推定された誤差は過小評価となっていると考えられ注意が必要である。ただし，これらのプロセス誤差を，近似的にMの誤差とみなして扱うことは可能であろう。

Table 2. Recruitment estimates and their standard errors for red sea bream (data from Shimamoto 1987). Standard errors are calculated from equations (A3) and (A4). The coefficients of variation of C, M, and F_t are assumed to be 20 %.

Year class	Recruitment estimate ($\times 10^6$)	Standard error ($\times 10^6$)
1977	3.4	0.5
1978	3.9	0.5
1979	4.2	0.6
1980	4.1	0.6
1981	5.5	0.8
1982	6.1	0.8
1983	9.1	1.3
1984	9.7	1.8
1985	9.1	2.4

謝　　辞

本研究を取りまとめるに当たり，貴重な御助言をいただいた遠洋水産研究所小井土隆技官（現長崎大学講師)，ならびに御校閲いただいた東京大学海洋研究所松宮義晴助教授，遠洋水産研究所畑中寛技官に感謝する。

文　　献

Gulland, J. A. 1965 : Estimation of mortality rates. Annex to Arctic Fisheries Working Group Report, ICES CM Gadoid Fish Comm., No. 3, 9 pp. (mimeo).

日高　健・白木原国雄・大内康敬　1989：コホート解析による筑前海マダイの資源量の推定．日水学誌，55(8)，1311-1318．

Hildén, M. 1988 : Errors of perception in stock and recruitment studies due to wrong choices of natural mortality rate in Virtual Population Analysis. *J. Cons. int. Explor. Mer*., 44, 123-134.

Hiramatsu, K. 1990 : A generalized stock and catch equation (in preparation).

石岡清英・岸田　達　1985：コホート解析に用いる漁獲方程式の解法とその精度の検討．南西水研報，19，111-120．

Megrey, B. A. 1988 : A review and comparison of age-structured stock assessment models from theoretical and applied points of view. NWAFC Processed Report 88-21, 116 pp.

Pope, J. G. 1972 : An investigation of the accuracy of Virtual Population Analysis using Cohort Analysis. *ICNAF Res. Bull*., 9, 65-74.

Prager, M. and A. D. MacCall 1988 : Sensitivites and variances of virtual population analysis as applied to the mackerel, *Scomber japonicus. Can. J. Fish. Aquat. Sci*., 45, 539-547.

Saila, S. B., E. Lorda and H. A. Walker 1985 : The analysis of parameter error propagation in simple fishery models. *Marine Res. Econ*., 1, 235-246.

Sampson, D. B. 1987 : Variance estimators for Virtual Population Analysis. *J. Con. int. Explor. Mer*., 43, 149-158.

Sampson, D. B. 1988 : The stability of Virtual Population Analysis cohort size estimates. *J. Cons. int. Explor. Mer*., 44, 135-142.

Seber, G. A. F. 1982 : The estimation of animal abundance and related parameters, 2nd ed. 7-9, Charles Griffin, London.

Siddeek, M. S. M. 1982 : A note on Pope's cohort analysis. *J. Cons. int. Explor. Mer*., 40, 209-210.

島本信夫 1987：瀬戸内海東部群マダイの資源評価．In：資源評価のための数値解析（嶋津靖彦編），88-101．恒星社厚生閣，東京．

Sims, S. E. 1982 : The effect of unevenly distributed catches on stock-size estimates using Virtual Population Analysis (Cohort Analysis). *J. Cons. int Explor. Mer*., 40,47-52.

Sims, S. E. 1984 : An analysis of the effect of errors in the natural mortality rate on stock-size estimates using Virtual Population Analysis (Cohort Analysis). *J. Con. int. Explor. Mer*., 41, 149-153.

Ulltang, ϕ. 1977 : Sources of errors in and limitations of Virtual Population Analysis (Cohort Analysis). *J. Cons. int. Explor. Mer*., 37, 249-260.

Appendix：デルタ法による分散式の導出

(1) 1変数の場合

$\bar{X}$を真の値，$\hat{X}$を誤差δX（$=\hat{X}-\bar{X}$）を含んだ値とする（あるいは，$\hat{X}$をランダム変数とみなし，$\bar{X}$をその平均値，δXを平均値との差と理解してもよい）。

$$N=f(X)$$

の関係があるときXの変動によるNの影響を，X，Nの分散V［$\hat{X}$］，V［$\hat{N}$］を使って表わすことを考える。まずf($\hat{X}$)を次のようにδXについて1次式で近似する。これはf($\hat{X}$)を$\bar{X}$のまわりでTaylor展開することに相当している。

$$\hat{N} \fallingdotseq f(\bar{X})+\frac{df(\bar{X})}{dX}\delta X$$

ここで，

$$\frac{df(\bar{X})}{dX}$$

はf(X)をXで微分したあと，$X=\bar{X}$を代入することを意味する。E［ ］を期待値（または平均値）とすると，この近似のもとで

$$V[\hat{N}]=E[(\hat{N}-E[\hat{N}])^2]$$

$$\fallingdotseq E[(f(\bar{X})+\frac{df}{dX}\delta X-E[f(\bar{X})+\frac{df}{dX}\delta X])^2]$$

$$=E\left[\left(f(\bar{X})+\frac{df}{dX}\delta X-f(\bar{X})\right)^2\right]$$

$$=E\left[\left(\frac{df(\bar{X})}{dX}\delta X\right)^2\right]$$

$$=\left(\frac{df(\bar{X})}{dX}\right)^2E\left[\delta X^2\right]$$

$$=\left(\frac{df(\bar{X})}{dX}\right)^2E\left[(\hat{X}-E[\hat{X}])^2\right]$$

$$=\left(\frac{df(\bar{X})}{dX}\right)^2V[\hat{X}] \tag{A 1}$$

となって(13)式が導かれた。なお，ここで

$$\frac{df(\bar{X})}{dX}$$

が定数であることを用いた。

(2)　多変数の場合

NがX_1，X_2，・・・，X_nの関数であれば，各$\hat{X}_i$を$\bar{X}_i$のまわりでTaylor展開すると

$$\hat{N}\fallingdotseq f(\bar{X})+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f(\bar{X})}{\partial X_i}\right)\delta X_i$$

ここで

$$\bar{X}=(\bar{X}_1,\ \bar{X}_2,\ \cdots,\ \bar{X}_n),\qquad \hat{X}=\bar{X}_i+\delta X_i$$

である。

このとき

$$V[\hat{N}]=E\left[(\hat{N}-E[\hat{N}])^2\right]$$

$$\fallingdotseq E\left[\left\{f(\bar{X})+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f(\bar{X})}{\partial X_i}\right)\delta X_i-E\left[f(\bar{X})+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f(\bar{X})}{\partial X_i}\right)\delta X_i\right]\right\}^2\right]$$

$$=E\left[\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f(\bar{X})}{\partial X_i}\right)\delta X_i\right\}^2\right]$$

$$=E\left[\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f(\bar{X})}{\partial X_i}\right)\delta X_i\right\}\cdot\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f(\bar{X})}{\partial X_j}\right)\delta X_j\right\}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f(\bar{X})}{\partial X_i}\right)\left(\frac{\partial f(\bar{X})}{\partial X_j}\right)E\left[\delta X_i\delta X_j\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f(\bar{X})}{\partial X_i}\right)^2E\left[(\hat{X}_i-E[\hat{X}_i])^2\right]$$

$$+\sum_{i,j}\frac{\partial f(\bar{X})}{\partial X_i}\ \frac{\partial f(\bar{X})}{\partial X_j}\ E\left[(\hat{X}_i-E[\hat{X}_i])(\hat{X}_j-E[\hat{X}_j])\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f(\bar{X})}{\partial X_i}\right)^2V[\hat{X}]+\sum_{i,j}\frac{\partial f(\bar{X})}{\partial X_i}\ \frac{\partial f(\bar{X})}{\partial X_j}\ \mathrm{Cov}[\hat{X}_i,\hat{X}_j] \tag{A 2}$$

ただし，第2項目の和は異なるi，jについてのみとる。Xの共分散が0であればこの項は0となる。

(3)　コホート解析の場合

コホート解析の場合には(5)，(6)式より

$$N_i = f(C_i, \cdot\cdot\cdot, C_t, M, F_t)$$

$$= \sum_{j=i}^{t-1} C_j \exp\left\{M\left(j-i+\frac{1}{2}\right)\right\} + \frac{C_t(F_t+M)}{F_t}\exp\{M(t-i)\}$$

よってこれに（A 2）式を適用すれば

$$V[\hat{N}_i] \fallingdotseq \sum_{j=i}^{t-1}\left(\frac{\partial f}{\partial C_j}\right)^2 V[\hat{C}_j] + \left(\frac{\partial f}{\partial C_t}\right)^2 V[\hat{C}_t] + \left(\frac{\partial f}{\partial M}\right)^2 V[\hat{M}] + \left(\frac{\partial f}{\partial F_t}\right)^2 V[\hat{F}_t] \tag{A 3}$$

ここで

$$\frac{\partial f}{\partial C_j} = \exp\left\{\bar{M}\left(j-i+\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial C_t} = \frac{\bar{F}_t+\bar{M}}{\bar{F}_t}\exp\{\bar{M}(t-i)\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial M} = \sum_{j=i}^{t-1}\left(j-i+\frac{1}{2}\right)\bar{C}_j\exp\left(j-i+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{\bar{F}_t}\{(\bar{F}_t+\bar{M})(t-i)+1\}\bar{C}_t\exp\{\bar{M}(t-i)\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial F_t} = \frac{\bar{M}}{\bar{F}_t{}^2}\bar{C}_t\exp\{\bar{M}(t-i)\} \tag{A 4}$$

なおC，M，F_t間の共分散は 0 と仮定した。